SGC ライブラリ- 138

基礎物理から理解する
ゲージ理論

“素粒子の標準数式”を読み解く

川村 嘉春 著

サイエンス社

まえがき

一部で「神の粒子」とよばれるヒグス粒子の発見に伴い，素粒子の標準模型が電弱スケールの物理としてさらに強固な位置を得ている．この模型の理論的枠組はゲージ理論（ゲージ場の量子論）とよばれる場の量子論である．よって，ゲージ理論を理解することは，実験や観測を通して検証・確認された素粒子物理学の最前線（に位置する標準模型）に到達する最短コースとなる．さらに，ゲージ理論を理解する最短コースや入門書があれば，それに沿って学んでみたいと思うだろう．このような願いを実現すべく，本書を作成した．

本書を執筆するに当たって，3 つのキーワード（あるいはコンセプト）「標準」，「基礎」，「解読」を念頭に置いた．「標準」に関しては，目標として素粒子の標準模型を理解することと内容に関して標準的であることを目指した．その際に，確立していることを中心に据(す)えてなるべく標準的な表記法を使用した．「基礎」に関しては，基礎物理，すなわち，物理学科の学生が学部の 3 年次までに学ぶ基礎的な物理学である力学 (解析力学を含む)，電磁気学，相対性理論，量子力学の知識と物理数学の手法を動員して，ゲージ理論を理解し，素粒子の標準模型の全体像を概観するという方式を選んだ．「解読」に関しては，素粒子の標準模型の根幹をなす数式（素粒子の標準数式と命名した）を暗号になぞらえて，その解読に挑むというスタイルを採った．ただし，目標，方式，スタイルを限定・確定した分，ゲージ理論にまつわる他の話題（ゲージ場の量子化や摂動計算，標準模型を超える理論的試み，磁気単極子やインスタントンやゲージ異常項などの位相幾何学と関係する物理，ゲージ理論による重力の定式化，$\cdots$）を割愛することとなった．興味のある方は適切な参考文献に当たってほしい．

本書の主な対象として，当初は基礎物理を一通り学び終えた方を想定していたが，物理数学の内容を充実させることにより，基礎物理を学んでいる真っ最中の方ばかりでなく，今から学ぼうとしている方でも読めるように配慮した．よって，大学の新入生でも飛ばし飛ばしになるかもしれないが，ある程度のところまで読めるように工夫したので挑戦してほしい．最初は細かい証明は飛ばしても構わないと思う．基礎物理や物理数学の学習が進んだ段階で立ち返ればよいと思う．学習のポイントは (1) 標準的な内容に慣れ親しむこと，(2) 基礎をしっかり身に付けること，(3) 暗号解読のように地道に取り組むこと，だと思う．第 5 章まではゲージ理論に至る関連する物理分野の紹介，いわば，基礎編なので，全く歯が立たないというような難所(なんしょ)はないと思う．第 6 章から第 8 章までは応用編なので，その理解にはある程度の素粒子に関する基礎知識が必要となるであろう．適切な入門書（例えば，南部陽一郎著の「クォーク 素粒子物理はどこまで進んできたか，第 2 版」（講談社，1998 年））を読んで知識を蓄えてから学習するとよいと思う．わからないことが雪だるま式に増えるのを恐れずに，頂上を目指しているうちに霧が晴れるように疑問点が解消されるときが来ることを信じて読み進めてほしい．

自主学習や自主ゼミにおいて，適切な参考書が心強い味方になることがある．体験談として，「一般相対性理論」を数式レベルで早く理解したくて，内山龍雄著の「相対性理論」（岩波書店，1977年）の読破を目標にしたことがある．それを遂行するために，「微分幾何学」，「線形代数学」，「解析力学」，「電磁気学」に関する自分に合いそうな書籍を大学図書館や生協で探しあて参考にしたことがある．そのような経験は「量子力学」，「場の量子論」，「素粒子物理学」を学習する上でも活かされたと思っている．

付録 A に記載した物理数学に関する言い訳をここで述べておく．定義や証明において厳密さに欠ける点があるかもしれないが，また，証明を省略している箇所もあるが，物理法則の理解を促進するのが主目的なので，大目に見てほしい．第 2 章から第 8 章までを読む際に，必要に応じて付録 A を参照することをお勧めする．

ずいぶん前に私の勤める大学で，従来とは切り口の異なる授業を提案したことがある．具体的には，現在，私が所属する学部では，基礎物理科目として力学 I，II，III，電磁気学 I，II，III，量子力学 I，II，III，相対性理論 I，II，熱力学，統計力学 I，II，物理数学 I，II，III に関する各 15 回の講義が行われているが，そのダイジェスト版（上記のもののエッセンスだけを紹介する 15 回の授業）を新入生に対して行うというものである．各回，その学問分野の「対象」，「舞台」，「法則」の紹介およびある程度の物理数学の紹介が主な内容となる．もしこのような授業形態が功（こう）を奏（そう）せば，新入生の学習意欲の向上が図（はか）れる，短期間（半年から 1 年ほど）で専門的な物理分野の内容（素粒子物理学ならば標準模型の枠組）にたどり着ける，物理数学の有用性・重要性が認識できる（新入生は「力学」を学ぶので「微積分」の有用性はすぐに理解できるが，「線形代数」の重要性は「量子力学」を学ぶまでわからない場合がある），などの利点が生まれるのではないかと勝手に想像している．ともあれ，このような発想を本書の作成に活かしたつもりである．

学部の改組に伴い，興味や習熟度に応じたプログラムが現在行われている．実際に，意欲のある 2 名の学生（茶木敬典君，古谷優樹君：学部の 3 年生）が「アドバンスゼミ」と称する授業のもとで集（つど）ってくれた．さらに，谷口建人君（1 年間の留学を終えてインドから帰国したばかりの学部生）も途中から加わってくれた．「渡りに船」のような形で，本書の原稿をもとにして読み合わせを行った．その際に読者の視点から様々な有益な指摘をもらった．この場をお借りして，彼らに感謝の意を表したい．それから，執筆活動を温かく見守ってくれた家族に感謝しています．最後に本書の刊行に向けて，筆者を励まし様々なアドバイス，原稿に関する気になる箇所の指摘をしてくださったサイエンス社の高橋良太氏，平勢耕介氏をはじめ出版社の皆様方に心より感謝申し上げます．

2017 年 9 月

川村 嘉春

目　次

第 1 章
素粒子の標準数式

素粒子の標準数式を理解するために，どのような段取りでどれくらいのことを学べばよいのかについて明確にしよう．

1.1 素粒子の標準数式とは

本書で“素粒子の標準数式”とよぶものは，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = \; & \overline{\psi} i \not{\partial} \psi \\
& - g_1 \overline{\psi} \not{B} \psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
& - g_2 \overline{\psi} \not{W} \psi - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \\
& - g_3 \overline{\psi} \not{G} \psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \\
& + \overline{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + \mathrm{h.c.} \\
& + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

である．

この数式を解読しながら，この式が意味する素粒子に関する物理法則およびそれを記述するゲージ理論（ゲージ場の量子論）を基礎物理を出発点として理解することが本書の主な目的である．高校生や大学の新入生の方には，この数式はラテン文字とギリシア文字が混在し，さらにおまじないのような横線や斜線が含まれていて全く意味不明な落書きのようにみえるだろう．素粒子の標準模型を知らない読者が本書を読んだのちに，この数式を見かえしたとき意味のあるものとして目に映ったならばこの上なくうれしく思う．

素粒子の標準数式が一部で「神の数式」*1) とよばれる所以(ゆえん)は，この数式が標準模型（The Standard Model）とよばれる，我々の世界を構成する素粒子の

*1) 標準模型における基本数式は NHK の番組で「神の数式」とよばれていた．

運動や相互作用に関する理論の根幹をなす数式だからである．**標準模型は現在までに行われた素粒子に関する実験結果との整合性が極めてよく，現時点で標準模型を超える素粒子に関する物理法則は確認されていない．**[*2)]

しかしながら，標準模型が自然界を記述する究極の理論とは言い難い．それは，標準模型の枠内では理解できない謎が数多く存在するからである．その謎に関しては 8.4 節で述べることにして，ここでは (1.1) **が自然法則を記述する最終版ではなく暫定（ざんてい）版であること**だけ心に留めておいてほしい．

(1.1) を理解するためには，「暗号解読のように 1 文字ずつ丹念に理解する」という姿勢でのぞむのがよいと思われる．そうすると，第 1 関門として以下のような疑問に順次挑むことになる．

- $\mathscr{L}$ は何を表しているのか？
- $\overline{\psi}$，i，$\not{\partial}$，ψ は何を表しているのか？
- g_1，$\not{B}$，$B^{\mu\nu}$，g_2，$\not{W}$，$W^{\mu\nu}$，g_3，$\not{G}$，$G^{\mu\nu}$ は何を表しているのか？
- y_{ij}，h.c. は何を表しているのか？また ψ_i の i は何を表しているのか？
- D_μ，ϕ，$V(\phi)$ は何を表しているのか？

1.2 解読の手順

この節では上記の疑問に関して，ある程度わかっている人にしか理解できないような少し不親切な回答（ここでは「簡易即答」とよぶことにする）を述べてから，さらなるステップに向かうための手順を解説する．

1.2.1 $\mathscr{L}$ とは

「$\mathscr{L}$ は何を表しているのか？」に対する簡易即答は，「$\mathscr{L}$ は**ラグランジアン密度**（Lagrangian density）とよばれる量を表している」である．第 2 関門として，芋（いも）づる式に次のような疑問が生じる．

- ラグランジアン密度とは何か？
- なぜ，ラグランジアン密度を扱うのか？
- ラグランジアン密度はどのようにして決まるのか？

こういった問いかけの答えを，**解析力学**（analytical mechanics）に見いだすことができる．第 2 章で**ニュートン力学**（Newtonian mechanics）を学んだのち，解析力学と場の解析力学と**相対論的力学**（relativistic dynamics）について扱う．ラグランジアン密度とその周辺の物理の理解に努めてほしい．

1.2.2 ψ とは

「$\overline{\psi}$，ψ は何を表しているのか？」に対する簡易即答は，「**物質粒子**（matter）

*2)　本書では，ニュートリノが質量をもつように拡張された模型を標準模型とよぶことにする．

に関する**場の演算子**（field operator）とよばれる量を表している」である．(1.1) の 1 行目の i は虚数単位を表し，$i^2 = -1$ である．また，$\not{\partial}$ は $\gamma^\mu \partial_\mu$ を表している．さらに，γ^μ は γ **行列**（gamma matrices）とよばれる 4 個の 4×4 行列で，上付きの添字（そえじ）$\mu (= 0, 1, 2, 3)$ で区別される．∂_μ は x^μ に関する偏微分を表す記号で，∂ はデル，あるいはラウンドデルタと発音される．芋づる式に次のような疑問が生じる．

- 物質粒子とは何か？
- 場の演算子とは何か？
- なぜ，場の演算子を扱うのか？
- 場の演算子が従う方程式はどんな形をしているのか？

こういった問いかけの答えを，**場の量子論**（quantum field theory）に見いだすことができる．第 3 章で**量子力学**（quantum mechanics）と**相対論的量子力学**（relativistic quantum mechanics）を学んだのち，場の量子論について扱う．物質粒子とその周辺の物理の理解に努めてほしい．

1.2.3　B_μ とは

「g_1，$\not{B}$，$B_{\mu\nu}$，g_2，$\not{W}$，$W_{\mu\nu}$，g_3，$\not{G}$，$G_{\mu\nu}$ は何を表しているのか？」については，対応関係から g_1，$\not{B}$，$B_{\mu\nu}$ が理解できれば，他の 2 組も容易に理解できると予想される．「g_1，$\not{B}$，$B_{\mu\nu}$ は何を表しているのか？」に対する一般的な簡易即答は，「g_1 は**ゲージ結合定数**（gauge coupling constant）を，$\not{B}$ は $\gamma^\mu B_\mu$ を，$B_{\mu\nu}$ は B_μ に関する**ゲージ場の強さ**（gauge strength）を表している」である．もう少し説明を加えるならば，「B_μ は**ゲージ場**（gauge field）（**ゲージ粒子**（gauge boson）ともよばれる）に関する場の演算子を表している」が付加される．当然のごとく，次のような疑問が湧（わ）いてくる．

- ゲージ結合定数とは何か？
- ゲージ場（ゲージ粒子），ゲージ場の強さとは何か？
- なぜ，ゲージ場を扱うのか？
- ゲージ場が従う方程式はどんな形をしているのか？

こういった問いかけに対する答えのヒントを**電磁気学**（electromagnetics）に見いだすことができる．第 4 章で電磁気学と**量子電磁力学**（quantum electrodynamics）について学ぶ．

g_2，$\not{W}$，$W_{\mu\nu}$，g_3，$\not{G}$，$G_{\mu\nu}$ に関する項を含めて，上記の疑問に対する一般的な答え（さらには，実在の物理系に即した具体的な答え）を得るためには，発想の転換が必要となる．具体的には，**ゲージ原理**（gauge principle）とよばれる指導原理のもとで理論の構築と拡張が成される．第 5 章で**量子電磁力学をお手本にして，それを拡張した理論であるゲージ理論（ゲージ場の量子論）とよばれる理論を定式化する**．ここが本書のハイライト（見せ場）の 1 つである．ゲージ場とその周辺の物理の理解に努めてほしい．

1.2.4　ϕ とは

「y_{ij}，h.c. は何を表しているのか？」に対する簡易即答は，「y_{ij} は**湯川結合定数**（Yukawa coupling constants）を，h.c. はエルミート共役（Hermitian conjugation）を表している」である．「ψ_i の i は何を表しているのか？」に対しては，「i は物質粒子を区別するための添字を表している」である．y_{ij} の i，j も同様の役割を果たし，湯川結合定数は複数存在する．さらに，「D_μ，ϕ，$V(\phi)$ は何を表しているのか？」に対する簡易即答は，「D_μ は**共変微分**（covariant derivative）を，ϕ は**ヒグス粒子**（Higgs boson）に関する場の演算子（ヒグス場）を，$V(\phi)$ は**ヒグスポテンシャル**（Higgs potential）を表している」である．やはり，次のような疑問が自然に湧きあがる．

- 湯川結合定数とは何か？
- エルミート共役とは何か？
- 共変微分とは何か？
- ヒグス粒子とは何か？
- なぜ，ヒグス粒子を扱うのか？
- ヒグスポテンシャルはどんな形をしているのか？
- ヒグス粒子が従う方程式はどんな形をしているのか？

こういった問いかけの答えを**電弱理論**（electroweak theory）に見いだすことができる．第 6 章では**弱い相互作用の解明を軸にして，ヒグス粒子の役割に基づいて電弱理論を紹介する**．ここがもう 1 つのハイライトである．また，電弱理論の中から，先に述べた「g_1，$\not{B}$，$B_{\mu\nu}$，g_2，$\not{W}$，$W_{\mu\nu}$ は何を表しているのか？」に関する具体的な答えも得られる．ヒグス粒子とその周辺の物理の理解に努めてほしい．

1.2.5　G_μ とは

第 7 章では「g_3，$\not{G}$，$G_{\mu\nu}$ は何を表しているのか？」という問いかけに対する具体的な答えを求めて，強い相互作用の解明を軸にして，**量子色力学**（quantum chromodynamics）を紹介する．

電弱理論と量子色力学を組み合わせ，さらに**小林・益川模型**（Kobayashi-Maskawa model）およびニュートリノ質量の存在を加味して**標準模型**に到達する．第 8 章で標準模型の特徴を紹介し，標準数式 (1.1) に関する暗号解読が終了する．最後に，標準模型の謎を列挙し，標準模型を超える物理に関する示唆を与える．標準模型の理解に努めてほしい．

1.3　本書の目的をもう一度

今一度，本書の目的を確認し学ぶことをまとめる．**本書の主な目的は万物の根源が従う法則を記述する標準数式を読み解いて，関連する様々な物理法則を**

系統的に理解することである．ここで，万物の根源とは自然界の基本的な構成物のことで一般に**素粒子**（elementary particle）とよばれている．

素粒子の標準数式を解読するためには，以下の 3 つの問いかけに挑む必要がある．

- 万物の根源は何か？
- 万物の根源が従う原理や法則は何か？
- いかに記述するか？

いきなり，素粒子の標準模型を出発点にして説明を始めると消化不良になりかねないので，本書では大学のカリキュラムに近い形で，すなわち，積み上げ方式に基づき一歩ずつ着実に理解を深めるという方法を採る．

とりあえず，「万物の根源は何か？」という問いかけを忘れて，力の起源を問わず，物体を抽象的に扱う．抽象化された物体が従う法則は「運動の法則」と「力の法則」に分類される．まずは以下の問いかけに答える必要がある．

- 物体をいかに抽象化するか？
- 運動の法則とはどのようなものか？
- 運動の法則をいかに記述するか？

2 番目の問いは「力がはたらいたとき，物体はどのような運動をするのか？」と言い換えられる．このような「力」と「運動」の関係を論じる物理学は**力学**（mechanics）とよばれ，身近な物体に対しては**古典力学**（classical mechanics）として体系化されている．古典力学を一般化・抽象化することにより，**解析力学**とよばれる定式化に至る．解析力学において注目すべき点は，ラグランジアンやハミルトニアンと**よばれる物理量に運動の法則と力の法則などが集約され，適用範囲が格段に広がる**ことである．

大学の新入生が学ぶ力学は主に**ニュートン力学**である．ニュートン力学は適用限界があり，物体の速さが光の速さに近づいたとき，特殊相対性理論（special theory of relativity）に基づく**相対論的力学**に移行する．また，微視的なレベルで**量子力学**に移行する．

大学で最初に学ぶ量子力学は**シュレーディンガー方程式**（Schrödinger equation）を基礎方程式とする物理学で，非相対論的な世界において，粒子数が変化しない場合に有効である．このような適用範囲を拡張した物理学として，**相対論的量子力学**と**場の量子論**が存在する．簡易即答気味の予告として述べておくと，相対論的量子力学とは**ディラック方程式**（Dirac equation）を基礎方程式とする特殊相対論的な量子力学であり，場の量子論とは粒子の生成や消滅，粒子間の相互作用を量子論の原理と基本法則に基づいて記述する場の理論で，この理論を用いて素粒子に関する原理や法則がよく記述され，様々な現象が系統的に説明される．ここで，「場」とは時間と空間の関数として表される実体で，その変動は波動方程式に従い伝搬（でんぱん）する．さらに，場の量子化を通して粒子的な性質が浮き彫りになる．よって，場の量子論において「場」と「粒子」は

同義語として用いられる．

次に「力」に着目する．「力の法則」を記述するお手本のような物理学は**電磁気学**である．電磁気力に関する法則は**マクスウェル方程式**（Maxwell equations）という形で定式化される．さらに，微視的な世界での電磁気現象は**量子電磁力学**により記述される．量子電磁力学は場の量子論の代表例でもある．

加えて，量子電磁力学を鑑(かがみ)として構築された理論が**ゲージ理論**（**ゲージ場の量子論**）とよばれるゲージ場を主役とする場の量子論である．この理論を用いて，素粒子にはたらく弱い力や強い力が理路整然と記述される．弱い力の定式化に際して，真空の解明が鍵となる．その際に主役となるのがヒグス粒子で，**対称性の自発的破れ**（spontaneous symmetry breakdown）に伴い**ヒグス機構**（Higgs mechanism）を引き起こす．一方，強い力の定式化に際して，物質粒子の一種であるクォークが有する色（color）とよばれる隠れた自由度が鍵となる．その際に活躍するのがグルーオン（gluon）とよばれるゲージ粒子で，**漸近的自由性**（asymptotic freedom）や**クォークの閉じ込め**（quark confinement）に関与する．このようにしてゲージ理論を基盤にして，**標準模型**とよばれる素粒子の運動と相互作用および真空の構造を記述する物理学に到達する．

物理学は対象，舞台，法則などを基準にして，学問分野の分類や細分化（古典力学，電磁気学，量子力学，$\cdots$）がなされる．例えば，微視的な世界の物理現象を支配する原理や基本法則（量子論の原理や基本法則）が適用されるか否かにより，2つに分類される．適用されない分野が**古典物理学**（**古典論**）で，適用される分野が**量子物理学**（**量子論**）である．次章で古典物理学，第3章で量子物理学を扱う．

第 2 章
古典物理学

「$\mathscr{L}$（ラグランジアン密度）が何を表しているのか？」を理解するために，ニュートン力学，解析力学，場の解析力学（場の古典論），相対論的力学について紹介する．$\mathscr{L}$ の役割と有用性に注目しながら読み進めてほしい．

2.1　ニュートン力学

力学とは，物体にはたらく力のつり合いや物体にはたらく力と物体の運動の関係を論じる学問である．

2.1.1　対象，舞台，法則

ニュートン力学の対象，舞台，法則について説明する．

ニュートン力学の主な対象は目でみえる身のまわりのもの（リンゴ，おもり，地球など）である．普遍的な性質を抽出するために，多くの場合，次のような理想化や単純化された物体を扱う．

質点とよばれる質量はあるが，大きさが無視できるもの．
剛体とよばれる質量と大きさをもつが，変形しないもの．

質量については 2.1.2 項で説明される．さらに，変形を加味して弾性体や流体とよばれる物体が扱われる．本書では主に質点を扱う．

舞台とは**時間**（time）と**空間**（space）のことである．ニュートン力学の舞台は次のような性質をもつ．

絶対時間とよばれる空間とは独立に一様に流れる時間．
ユークリッド空間とよばれる平坦で一様・等方な空間．

ユークリッド空間において直交座標系を導入すると，原点 O は $(0,0,0)$，点 P は位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ で指定される（図 2.1 参照）．OP 間の距離は

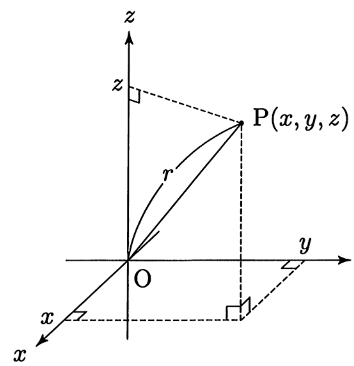


図 2.1 直交座標系.

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2.1}$$

で与えられる.

法則とは自然界を支配するルールのことである．ニュートン力学の運動に関する法則は次の 3 法則にまとめられる.

運動の第 1 法則：物体が力を受けないとき，物体の運動状態は変化しない.
運動の第 2 法則：物体に力がはたらくとき，力に比例する加速度をもつ.
運動の第 3 法則：物体 1 が別の物体 2 に力を及ぼすとき，物体 1 は物体 2 から大きさが同じで逆向きの力を受ける.

これらの法則は**ニュートンの運動の 3 法則**とよばれる.

2.1.2 ニュートンの運動方程式

ニュートンの運動の 3 法則を定式化する.

第 1 法則は**慣性の法則**ともよばれ，この法則が成り立つ系は**慣性系** (inertial system) とよばれる．ニュートン力学は慣性系に基づいて構成される.

第 2 法則は**運動の法則**ともよばれ,

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{2.2}$$

と表される．ここで，m は物体の運動状態の変え難（がた）さを表すパラメータで**慣性質量**または単に**質量** (mass) とよばれる．また，$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ は加速度，$\boldsymbol{F}$ は物体にはたらく力である．**力** (force) とは物体の運動状態を変えるはたらき掛けである．(2.2) は**ニュートンの運動方程式**とよばれ，力の形態が特定されれば，この微分方程式を解くことにより物体の運動状態を知ることができる.

第 3 法則を式で表すと,

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} = -\boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1} \tag{2.3}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}$ は物体 2 が物体 1 に及ぼす力で，$\boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1}$ は物体 1 が物

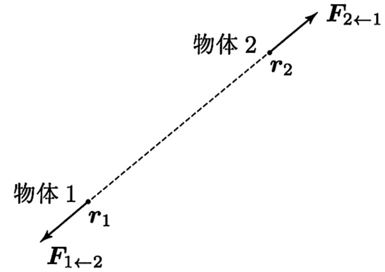


図 2.2　作用と反作用.

体 2 に及ぼす力である（図 2.2 参照）. 物体 1 を基準にして，物体 1 が物体 2 に及ぼす力を**作用**，物体 1 が物体 2 から受ける力を**反作用**とよぶ．それゆえ，運動の第 3 法則は**作用・反作用の法則**ともよばれる．

さらに次の法則を追加したものが，強い形の第 3 法則である．

> 作用と反作用の方向は 2 つの物体を結ぶ線に平行である．

これを式で表すと，

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} \,/\!/\, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,\quad \boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1} \,/\!/\, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \tag{2.4}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{r}_1$ は物体 1 の位置ベクトル，$\boldsymbol{r}_2$ は物体 2 の位置ベクトルである（図 2.2 参照）．また，// は平行を表す記号である．

2.1.3　運動量，角運動量，エネルギー

物理系の性質を理解するのに有用な 3 種類の物理量（運動量，角運動量，エネルギー）に関して，質点が 1 個と 2 個の場合について紹介する．

2.1.3.1　質点が 1 個の場合

物体の質量 m に速度 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ を掛けた量

$$\boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2.5}$$

は**運動量**（momentum）とよばれる運動の勢いを表すベクトル量で，これを用いて，(2.2) は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{2.6}$$

と表され，**物体の運動量の変化率は物体にはたらく力に等しい**ことがわかる．

物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量 $\boldsymbol{p}$ の外積を取った量

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2.7}$$

は原点のまわりの**角運動量**（angular momentum）で，

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{2.8}$$

に従う．(2.7) の $\boldsymbol{l}$ を時間で微分して，$m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{0}$ と $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$ を用いて (2.8) が導かれる．

質量 m の物体の**運動エネルギー**（kinetic energy）とは，

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 \tag{2.9}$$

で定義される物理量である．運動エネルギーを有する物体は別の物体を動かす能力をもっていて，

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2.10}$$

に従う．(2.9) の T を時間で微分して，$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = 2\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ と $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$ を用いて，(2.10) が導かれる．

$\boldsymbol{F}$ が関数 $U = U(x, y, z)$ を用いて，

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{2.11}$$

と表されるとき，

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 + U(x, y, z)\right\} = 0 \tag{2.12}$$

が成り立つ．ちなみに，$\boldsymbol{\nabla}$ は微分演算子の一種でナブラと発音される．(2.12) は

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \boldsymbol{\nabla} U \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2.13}$$

を用いて示される．(2.11) のような $\boldsymbol{F}$ は**保存力**（conservative force）とよばれる．また，U は**ポテンシャルエネルギー**（potential energy）とよばれ，(2.12) は T と U の和が一定であることを意味し，**力学的エネルギーの保存則**とよばれる．さらに U が**中心力ポテンシャル**，すなわち，$U = U(r)$ のとき，$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla} U = -\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ より，

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{0} \tag{2.14}$$

が成り立つ．(2.14) は**角運動量保存則**を表す．

2.1.3.2　質点が 2 個の場合

簡単のため，外力がはたらいていない 2 個の質点について考える．質量 m_1，m_2 の質点の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ とし，内力を $\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}$，$\boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1}$ とすると，各質点は運動方程式

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}, \quad m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1} \tag{2.15}$$

に従う．各質点の運動量 $\boldsymbol{p}_k$，原点のまわりの角運動量 $\boldsymbol{l}_k$，運動エネルギー T_k $(k = 1, 2)$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{p}_1 = m_1 \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}, \quad \boldsymbol{p}_2 = m_2 \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}, \quad \boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2,$$
$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \right)^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} \right)^2 \tag{2.16}$$

で与えられ，

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1}, \quad \frac{d\boldsymbol{l}_1}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}, \quad \frac{d\boldsymbol{l}_2}{dt} = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1},$$
$$\frac{dT_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}, \quad \frac{dT_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} \tag{2.17}$$

に従う．内力が強い形の運動の第 3 法則

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} = -\boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1}, \quad \boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} \mathbin{//} \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \tag{2.18}$$

に従うような保存力，すなわち，$U = U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ と $\boldsymbol{\nabla}_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right)$ を用いて，

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} = -\boldsymbol{\nabla}_1 U, \quad \boldsymbol{F}_{2\leftarrow 1} = -\boldsymbol{\nabla}_2 U \tag{2.19}$$

と表されるとき，全運動量 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$，全角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2$，全力学的エネルギー $E = T_1 + T_2 + U$ に関する保存則

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{0}, \quad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{0}, \quad \frac{dE}{dt} = 0 \tag{2.20}$$

が成り立つ．N 個の質点系への拡張も比較的容易に実行できる．

2.1.4　力の法則の例

物理系に応じて物体には様々な力がはたらくことが知られている．ここでは，2 種類の力に限定して，その法則について紹介する．

2.1.4.1　フックの法則

図 2.3 のように質量 m のおもりが軽いばねの先に付けられていて，水平でなめらかな床の上に置かれているとする．おもりをつり合いの位置からずらすとばねは元の状態に戻ろうとしておもりに力を及ぼす．このばねによる力は**弾性力**（**復元力**）の一種で，次のような法則が成り立つ．

フック（Hooke）の法則：おもりをつり合いの位置から変位させると，ばねは元の状態に戻ろうとして，おもりに変位の大きさに比例する力を変位の向きと逆の向きに及ぼす．

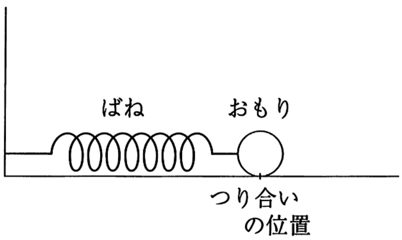


図 2.3　ばねとおもり.

ばねの伸び縮みの方向が変わらない場合，この法則を式で表すと，

$$F_x = -kx \tag{2.21}$$

となり，おもりの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{2.22}$$

で与えられる．ここで，変位の向きを x 軸の正の向きに選び，つり合いの位置を $x=0$ に選んだ．このように変位の大きさに比例する弾性力を受けて運動する物体は**調和振動子**（harmonic oscillator）とよばれる．m，k の代わりに $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ を用いると，(2.22) は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{2.23}$$

と表される．(2.23) は**単振動の方程式**とよばれ，様々な物理系に登場する．

(2.23) の一般解は

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{2.24}$$

で与えられる．ここで，$A(>0)$ は**振幅**（amplitude），θ_0 は**初期位相**とよばれる定数である．また，$\omega t + \theta_0$ は**位相**（phase）である．弾性力 $F_x = -kx$ は $U = \dfrac{1}{2}kx^2$ を用いて，$F_x = -\dfrac{dU}{dx}$ と表されるため保存力で，力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.25}$$

が保存する．実際，(2.24) を代入して，$E = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 一定$ が得られる．

2.1.4.2　万有引力の法則

図 2.4 のように，物体 1，物体 2 がそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ で指定される位置に存在しているとき，両者には次のような法則が成り立つ．

> **万有引力の法則**：質量 m_1 の物体 1 と質量 m_2 の物体 2 の間には，それらの質量の積に比例し，物体間の距離 $r(=|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ の 2 乗に反比例する引力がはたらく．

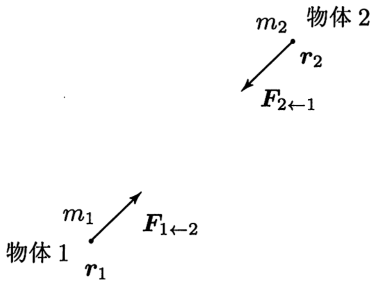


図 2.4　万有引力.

この法則を式で表すと,

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\boldsymbol{e}_{12}, \quad \boldsymbol{e}_{12} \equiv \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \tag{2.26}$$

となる. ここで, G は**万有引力定数**で, その値は $G \doteqdot 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}}$ である. また, $\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}$ は

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} = -\boldsymbol{\nabla}_1 U(r) \tag{2.27}$$

と表されるため, 保存力である. ここで, $r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$, $U(r)$ は**万有引力のポテンシャルエネルギー**で,

$$U(r) = \int_\infty^r G\frac{m_1 m_2}{r'^2}dr' = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{2.28}$$

で与えられる. ポテンシャルエネルギーの基準点として無限遠点（$r = \infty$）を選び, そこでの U の値を 0 とした. 万有引力はあらゆる物体にはたらく力で, 万有引力の法則を用いて運動方程式を解くことにより, 惑星の運動に関するケプラーの 3 法則を導くことができる.

2.2　解析力学

ニュートンの運動方程式の書き換えを行う. その目的は解きやすくするためと定式化の適用範囲を拡張するためである.

2.2.1　ラグランジュ形式

ラグランジュ形式において, ラグランジアン（Lagrangian）とよばれる物理量が基本的な量となる. 保存力に関するニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{2.29}$$

に対して, ラグランジアン L は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}) \tag{2.30}$$

で与えられる．ここで，$\dot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ である．L は関数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ と $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$ から構成される．(2.30) を用いて，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla} U \tag{2.31}$$

が得られ，(2.29) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0 \tag{2.32}$$

のように書き換えられる．(2.32) は**ラグランジュの方程式**（Lagrange's equation of motion），あるいは**オイラー・ラグランジュ方程式**（Euler-Lagrange equation）とよばれる．ここで，$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$，$\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}$ はそれぞれ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right), \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\nabla} L = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}\right) \tag{2.33}$$

を表す．

別の変数を選んだ場合や多自由度をもつ系への拡張は容易で，**一般座標**（generalized coordinates）$q_a = q_a(t)$（$a = 1, 2, \cdots, n$）を用いて，系がラグランジアン $L = L(q_a, \dot{q}_a)$ で記述される場合*1)，運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \tag{2.34}$$

と表される．q_a の例として，3 次元極座標 (r, θ, φ) や 2 粒子系の位置座標 $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ などがある．q_a を座標変数とする空間は**配位空間**（configuration space）とよばれる．

2.2.2 ハミルトン形式

ハミルトン形式において，ハミルトニアン（Hamiltonian）とよばれる物理量が基本的な量となる．(2.29) に対して，ハミルトニアン H は

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + U(\boldsymbol{r}) \tag{2.35}$$

で与えられる．H は関数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$ から構成される．H の値は力学的エネルギーである．(2.35) を用いて，

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\nabla} U \tag{2.36}$$

が得られ，運動量 $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$，ニュートンの運動方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} U$ はそれぞれ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{2.37}$$

*1) 正確には，L は $L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n) = L(\{q_a\}, \{\dot{q}_a\})$ のことであるが，簡単のため，$L(q_a, \dot{q}_a)$ と記した．以後も同様である．

のように書き換えられる．(2.37) は**ハミルトンの方程式**，あるいは**ハミルトンの正準方程式**（Hamilton's canonical equations of motion）とよばれる．

一般座標 $q_a = q_a(t)$ と**一般運動量**（generalized momentum）$p^a = p^a(t)$ $(a = 1, 2, \cdots, n)$ を用いて，系がハミルトニアン $H = H(q_a, p^a)$ で記述される場合，運動方程式は

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^a}, \quad \frac{dp^a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a} \tag{2.38}$$

と表される．ここで，一般運動量に対して，上付きの添字を用いたのは相対性理論を意識したためである．実際，のちほど明らかになるように，相対性理論において時間や空間に関する量を扱う際に添字の位置が意味をもつ．q_a と p^a を座標変数とする空間は**位相空間**（phase space）とよばれる．

ラグランジュ形式では運動方程式は時間に関する 2 階の微分方程式であるが，ハミルトン形式では時間に関する 1 階の微分方程式で，変数の増加に伴い方程式の数が倍になるが微分の階数が減少するため解きやすくなる．

2.2.3 変分原理

L や H を用いた定式化は方程式の単なる書き換えではなく，それ以上の意味や利点をもつ．定式化のための拠(よ)り所としてニュートンの運動の 3 法則の代わりに**変分原理**(variational principle)，あるいは**ハミルトンの原理**(Hamilton's principle）とよばれる次のような深淵な原理が存在する．

変分原理：物体の運動は作用が極値を取るような経路をたどる．

ここで，**作用**（action），あるいは**作用積分**（action integral）とはラグランジアン L を用いて，

$$S[q_a] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_a, \dot{q}_a, t)dt \tag{2.39}$$

と表される積分である（作用・反作用の法則における力を意味する作用と混同しないようにしよう）．このように関数（ここでは，$q_a = q_a(t)$，$\dot{q}_a = \dot{q}_a(t)$）を数値に写す写像は**汎(はん)関数**（functional）とよばれる（A.3.3 項参照）．作用が極値を取る条件は経路の途中で行う**変分**（variation）とよばれる任意の微小な仮想的な変位 δq_a（図 2.5 参照）に対して，

$$\begin{aligned}\delta S[q_a] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_a, \dot{q}_a, t)dt \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.40}$$

が成り立つことである．実際に，作用を変分すると，

$$\delta S[q_a] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_a + \delta q_a, \dot{q}_a + \delta \dot{q}_a, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_a, \dot{q}_a, t)dt$$

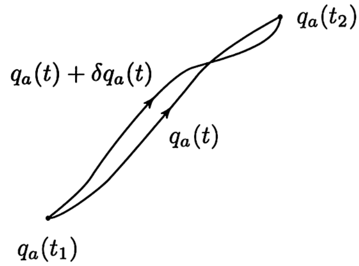


図 2.5　変分.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\delta \dot{q}_a \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\frac{d(\delta q_a)}{dt} \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{a=1}^{n} \left[\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \right\} \delta q_a + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\delta q_a \right) \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{a=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \right\} \delta q_a dt + \sum_{a=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\delta q_a \right]_{t_1}^{t_2} \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

となり, $\delta S[q_a]=0$ が成立するためには (2.34) が成り立つ必要がある. ここで, 経路の両端での変分は $0\,(\delta q_a(t_1)=0,\ \delta q_a(t_2)=0)$ として, 最後の行の第 2 項は 0 となる. また, 変分は時間発展と独立したもので, $\delta \dot{q}_a = \delta\left(\frac{dq_a}{dt}\right) = \frac{d(\delta q_a)}{dt}$ である. このようにして, 変分原理からラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \qquad (2.42)$$

が導かれる.

L と H は**ルジャンドル変換** (Legendre transformation)

$$H = \sum_{a=1}^{n} p^a \dot{q}_a - L \qquad (2.43)$$

で結ばれる. q_a に共役な一般運動量 p^a は

$$p^a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \qquad (2.44)$$

で定義される*2). 拘束条件が存在しない場合, (2.44) を解くことにより $\dot{q}_a$ が q_b と p^b $(b=1,2,\cdots,n)$ の関数として得られ, H が q_b と p^b の関数となる.

(2.43) から $L=\sum_{a=1}^{n} p^a\dot{q}_a - H$ が導かれ, これを用いて作用の変分は

*2) p^a は運動量というネーミングを含むが, 必ずしもその次元が運動量の次元 $[MLT^{-1}]$ と一致するとは限らないことに注意しよう. 例えば, 3 次元極座標の天頂角 θ に共役な一般運動量は角運動量で, その次元は $[ML^2T^{-1}]$ である.

$$
\begin{aligned}
\delta S[q_a] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{a=1}^{n} p^a \dot{q}_a - H \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{a=1}^{n} \left(\delta p^a \dot{q}_a + p^a \delta \dot{q}_a - \frac{\partial H}{\partial q_a} \delta q_a - \frac{\partial H}{\partial p^a} \delta p^a \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{a=1}^{n} \left(\delta p^a \dot{q}_a + p^a \frac{d(\delta q_a)}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_a} \delta q_a - \frac{\partial H}{\partial p^a} \delta p^a \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{a=1}^{n} \left\{ \delta p^a \left(\dot{q}_a - \frac{\partial H}{\partial p^a} \right) - \left(\dot{p}^a + \frac{\partial H}{\partial q_a} \right) \delta q_a \right\} dt \\
&\quad + \sum_{a=1}^{n} [p^a \delta q_a]_{t_1}^{t_2} \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

のように変形され，$\delta q_a(t_1) = 0$，$\delta q_a(t_2) = 0$ に対して最後の項は 0 となり，$\delta S[q_a] = 0$ が成立するためには，(2.38) が成り立つ必要がある．このようにして，変分原理からハミルトンの方程式

$$
\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^a}, \quad \frac{dp^a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a} \qquad (2.46)
$$

が導かれる．

2.2.4 方程式の共変性

ラグランジュ形式やハミルトン形式の特徴として，**方程式の共変性**が挙げられる．ここで，**方程式の共変性とは変数変換のもとで方程式が同じ形をとる性質のことである**．具体的には，一般座標に関する変数変換 $\tilde{q}_a = \tilde{q}_a(q_b)$ $(a, b = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，$\tilde{q}_a$ が従う方程式は

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_a} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_a} = 0 \qquad (2.47)
$$

である．ここで，$\tilde{L}$ は $\tilde{q}_a$ と $\dot{\tilde{q}}_a$ を変数とするラグランジアンで $\tilde{L}(\tilde{q}_a, \dot{\tilde{q}}_a, t) = L(q_a, \dot{q}_a, t)$ が成り立つ．

同様にして，一般座標とそれに正準共役な一般運動量に関する変数変換 $Q_a = Q_a(q_b, p^b)$，$P^a = P^a(q_b, p^b)$ に対して，Q_a，P^a が従う方程式は

$$
\frac{dQ_a}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P^a}, \quad \frac{dP^a}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_a} \qquad (2.48)
$$

である．ここで，K は Q_a と P^a を変数とするハミルトニアンで，

$$
\sum_{a=1}^{n} p^a \dot{q}_a - H(q_a, p^a, t) = \sum_{a=1}^{n} P^a \dot{Q}_a - K(Q_a, P^a, t) + \frac{dW}{dt} \qquad (2.49)
$$

が成り立つ．このような変換は**正準変換**（canonical transformation）とよばれる．また，W は正準変換の**母関数**（generating function）である．(2.49) の右辺に基づく作用に対して，変分原理を用いて，(2.48) が導かれる．全微分

$\dfrac{dW}{dt}$ は変分に寄与しないことに注意しよう．実際，W の変数をまとめて x_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, 2n)$ と記し，$\delta x_\alpha(t_1) = 0$，$\delta x_\alpha(t_2) = 0$ とすると，

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta\left(\frac{dW}{dt}\right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\delta W)\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha\right) dt = \left[\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha\right]_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad (2.50)\end{aligned}$$

となり，運動方程式に寄与しないことがわかる．

正準変数 q_a，p^a に関するハミルトンの方程式 (2.38) は

$$\frac{dq_a}{dt} = \{q_a, H\}_{\mathrm{PB}}, \quad \frac{dp^a}{dt} = \{p^a, H\}_{\mathrm{PB}} \qquad (2.51)$$

のように書き換えられる．ここで，$\{A, B\}_{\mathrm{PB}}$ は**ポアソン括弧**（Poisson bracket）とよばれ，

$$\{A, B\}_{\mathrm{PB}} \equiv \sum_{a=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_a}\frac{\partial B}{\partial p^a} - \frac{\partial A}{\partial p^a}\frac{\partial B}{\partial q_a}\right) \qquad (2.52)$$

で定義される．(2.52) より，

$$\{q_a, p^b\}_{\mathrm{PB}} = \delta_a{}^b, \quad \{q_a, q_b\}_{\mathrm{PB}} = 0, \quad \{p^a, p^b\}_{\mathrm{PB}} = 0 \qquad (2.53)$$

が成り立つ．ここで，$\delta_a{}^b$ は**クロネッカーの** δ （Kronecker's δ）とよばれ，

$$\delta_a{}^b = \begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases} \qquad (2.54)$$

を表す．ポアソン括弧を用いて，$F(q_a, p^a, t)$ が

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{\mathrm{PB}} + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (2.55)$$

に従うことが，

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{a=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_a}\frac{dq_a}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p^a}\frac{dp^a}{dt}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum_{a=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p^a} - \frac{\partial F}{\partial p^a}\frac{\partial H}{\partial q_a}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (2.56)\end{aligned}$$

のように示される．2 行目に移る際に (2.38) を用いた．(2.55) もハミルトンの方程式とよばれる．

2.2.5　対称性と保存則

数学や物理学において，**対称性**（symmetry）とは変換のもとでの**不変性**（invariance）のことである．一般に対称性に付随して**保存量**（conserved quantity）が存在する．解析力学において，対称性と保存量の関係が明確に定式化される．

2.2.5.1 ラグランジュ形式における保存則

ラグランジアンが有する対称性に基づいて，**保存則**（conservation law）を導出する組織的な方法が存在し，次に記載する**ネーターの定理**（Noether's theorem）に集約される．

【ネーターの定理】 時間 t および一般座標 q_a に関する無限小変換

$$t \to t' = t + \varepsilon\xi(t) \quad (\varepsilon\text{: 無限小の定数}), \tag{2.57}$$

$$q_a(t) \to q'_a(t') = q_a(t) + \varepsilon\Xi_a(q_b, t) \tag{2.58}$$

に対して，作用積分が不変に保たれるとき，すなわち，

$$\int_{t'_1}^{t'_2} L\left(q'_a(t'), \frac{dq'_a(t')}{dt'}\right) dt' = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_a(t), \frac{dq_a(t)}{dt}\right) dt \tag{2.59}$$

となるとき，保存則

$$\frac{d}{dt}\Phi = 0 \tag{2.60}$$

を満たす**保存量**

$$\Phi = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\left(\Xi_a - \xi\frac{dq_a}{dt}\right) + \xi L \tag{2.61}$$

が存在する．

（証明）(2.59) の左辺の量を S' とする．$\dfrac{dt'}{dt} = 1 + \varepsilon\dfrac{d\xi}{dt}$ を用いて，S' は

$$\begin{aligned}
S' &= \int_{t'_1}^{t'_2} L\left(q'_a(t'), \frac{dq'_a(t')}{dt'}\right) dt' = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q'_a(t'), \frac{dq'_a(t')}{dt'}\right) \frac{dt'}{dt}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L\left(q'_a(t'), \frac{dq'_a(t')}{dt'}\right) dt + \varepsilon\int_{t_1}^{t_2} L\left(q'_a(t'), \frac{dq'_a(t')}{dt'}\right) \frac{d\xi}{dt}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L\left(q'_a(t'), \frac{dq'_a(t')}{dt'}\right) dt + \varepsilon\int_{t_1}^{t_2} L\left(q_a(t), \frac{dq_a(t)}{dt}\right) \frac{d\xi}{dt}dt \\
&= S + \int_{t_1}^{t_2} \left\{L\left(q'_a(t'), \frac{dq'_a(t')}{dt'}\right) - L\left(q_a(t), \frac{dq_a(t)}{dt}\right)\right\} dt \\
&\quad +\varepsilon\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(L\xi)\,dt - \varepsilon\int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{dt}\xi dt
\end{aligned} \tag{2.62}$$

のように変形される．2 行目から 3 行目に移る際に，$L\left(q'_a(t'), \dfrac{dq'_a(t')}{dt'}\right)$ と $L\left(q_a(t), \dfrac{dq_a(t)}{dt}\right)$ の差は ε 程度の量で高次の項になるため，$L\left(q'_a(t'), \dfrac{dq'_a(t')}{dt'}\right)$ を $L\left(q_a(t), \dfrac{dq_a(t)}{dt}\right)$ に置き換えた．また，S は (2.59) の右辺の量である．さらに，最後の行で ε を係数にもつ 2 つの項における L は $L\left(q_a(t), \dfrac{dq_a(t)}{dt}\right)$ である．

$q'_a(t') = q_a(t) + \varepsilon\Xi_a$ および $\dfrac{dq'_a(t')}{dt'}$ に関する公式

$$\begin{aligned}\frac{dq'_a(t')}{dt'} &= \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}(q_a(t)+\varepsilon\Xi_a) = \left(1-\varepsilon\frac{d\xi}{dt}\right)\left(\frac{dq_a(t)}{dt}+\varepsilon\frac{d\Xi_a}{dt}\right)\\ &= \frac{dq_a(t)}{dt} - \varepsilon\frac{d\xi}{dt}\frac{dq_a(t)}{dt} + \varepsilon\frac{d\Xi_a}{dt}\end{aligned} \tag{2.63}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}&L\left(q'_a(t'), \frac{dq'_a(t')}{dt'}\right) - L\left(q_a(t), \frac{dq_a(t)}{dt}\right)\\ &\quad = \sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_a}\varepsilon\Xi_a + \sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\left(-\varepsilon\frac{d\xi}{dt}\frac{dq_a}{dt}+\varepsilon\frac{d\Xi_a}{dt}\right)\\ &\quad = \sum_{a=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)\right\}\varepsilon\Xi_a\\ &\qquad + \varepsilon\frac{d}{dt}\left\{\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\left(\Xi_a - \xi\frac{dq_a}{dt}\right)\right\} + \varepsilon\xi\frac{d}{dt}\left(\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\frac{dq_a}{dt}\right)\end{aligned} \tag{2.64}$$

が導かれる．さらに，(2.62) の最後の項の被積分関数と (2.64) の最後の項を加えることにより，

$$\begin{aligned}&-\varepsilon\frac{dL}{dt}\xi + \varepsilon\xi\frac{d}{dt}\left(\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\frac{dq_a}{dt}\right)\\ &\quad = -\varepsilon\xi\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_a}\frac{dq_a}{dt} - \varepsilon\xi\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\frac{d^2q_a}{dt^2}\\ &\qquad + \varepsilon\xi\sum_{a=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)\frac{dq_a}{dt} + \varepsilon\xi\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\frac{d^2q_a}{dt^2}\\ &\quad = -\varepsilon\xi\sum_{a=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)\right\}\frac{dq_a}{dt}\end{aligned} \tag{2.65}$$

が導かれる．これらを (2.62) に代入して整理することにより，

$$\begin{aligned}S' &= S + \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\sum_{a=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)\right\}\left(\Xi_a - \xi\frac{dq_a}{dt}\right)dt\\ &\quad + \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\left(\Xi_a - \xi\frac{dq_a}{dt}\right) + \xi L\right\}dt\end{aligned} \tag{2.66}$$

が得られる．$S' = S$ が成り立つとき，ラグランジュ方程式の成立を要請して保存則 (2.60) が導かれる．■

2.2.5.2　2 粒子系の例

質量が m_1，m_2 である 2 つの粒子の運動が

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \tag{2.67}$$

により記述される 2 粒子系に対して，保存則を導出しよう．一般座標を $q_a = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ とし，一般運動量を $p^a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$

$= (m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1, m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2) = (m_1\dot{x}_1, m_1\dot{y}_1, m_1\dot{z}_1, m_2\dot{x}_2, m_2\dot{y}_2, m_2\dot{z}_2)$ とする．

(1) **並進**（translation）

$t' = t$ で，x 軸方向の並進

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \varepsilon,\quad y_1' = y_1,\quad z_1' = z_1, \\ x_2' &= x_2 + \varepsilon,\quad y_2' = y_2,\quad z_2' = z_2 \end{aligned} \tag{2.68}$$

のもとで L は不変である．このとき，$\xi = 0$，$\Xi_a = (1,0,0,1,0,0)$ であるから，保存量は

$$P_x = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 \tag{2.69}$$

で，保存則 $\dfrac{dP_x}{dt} = 0$ が得られる．ここで，P_x は全運動量の x 成分である．同様にして，y 軸方向や z 軸方向の並進不変性から $\dfrac{dP_y}{dt} = 0$ や $\dfrac{dP_z}{dt} = 0$ が導かれる．よって，運動量保存則 $\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt} = 0$ が成り立つ．

(2) **回転**（rotation）

$t' = t$ で，z 軸のまわりの回転

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - \varepsilon y_1,\quad y_1' = \varepsilon x_1 + y_1,\quad z_1' = z_1, \\ x_2' &= x_2 - \varepsilon y_2,\quad y_2' = \varepsilon x_2 + y_2,\quad z_2' = z_2 \end{aligned} \tag{2.70}$$

のもとで L は不変である．このとき，$\xi = 0$，$\Xi_a = (-y_1, x_1, 0, -y_2, x_2, 0)$ であるから，保存量は

$$L_z = m_1(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + m_2(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2) \tag{2.71}$$

で，保存則 $\dfrac{dL_z}{dt} = 0$ が得られる．ここで，L_z は全角運動量の z 成分である．同様にして，x 軸のまわりや y 軸のまわりの回転不変性から $\dfrac{dL_x}{dt} = 0$ や $\dfrac{dL_y}{dt} = 0$ が導かれる．よって，角運動量保存則 $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$ が成り立つ．

(3) **時間推進**（time translation）

無限小の時間推進

$$t \to t' = t - \varepsilon,\quad \boldsymbol{r}_1(t) \to \boldsymbol{r}_1'(t') = \boldsymbol{r}_1(t),\quad \boldsymbol{r}_2(t) \to \boldsymbol{r}_2'(t') = \boldsymbol{r}_2(t) \tag{2.72}$$

のもとで，作用積分 S は不変である．このとき，$\xi = -1$，$\Xi_a = 0$ であるから，保存量は

$$\varPhi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_1}\dot{\boldsymbol{r}}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_2}\dot{\boldsymbol{r}}_2 - L = H \tag{2.73}$$

で，保存則 $\dfrac{dH}{dt} = 0$ が得られる．ここで，H はハミルトニアンである．よって，力学的エネルギーの保存則が成り立つ．

この系からわかるように 3 種類の物理量（運動量，角運動量，力学的エネル

ギー）の保存則は舞台である空間や時間の性質・構造と深く関わる．具体的には，**運動量保存則は空間の一様性に，角運動量保存則は空間の等方性に，力学的エネルギーの保存則は時間の一様性に起因する．**

2.2.5.3 ハミルトン形式における保存則

$G = G(q_a, p^a)$（G があらわに時間 t に依存しない）に対して，$\{G, H\}_{\rm PB} = 0$ が成り立つとき，(2.55) より，

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\}_{\rm PB} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \tag{2.74}$$

が導かれ，G が保存量となる．さらに，$\{G, H\}_{\rm PB} = 0$ を満たす保存量 G が与えられたとき，無限小変換

$$\delta q_a = q'_a - q_a = \{q_a, \varepsilon G\}_{\rm PB} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p^a}, \tag{2.75}$$

$$\delta p^a = p'^a - p^a = \{p^a, \varepsilon G\}_{\rm PB} = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_a} \tag{2.76}$$

が定義され，この変換のもとでハミルトニアンが不変になることが，

$$\begin{aligned}\delta H(q_a, p^a) &= H(q'_a, p'^a) - H(q_a, p^a) = \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial H}{\partial p^a} \delta p^a \right) \\ &= \sum_{a=1}^{n} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_a} \left(\varepsilon \frac{\partial G}{\partial p^a} \right) + \frac{\partial H}{\partial p^a} \left(-\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_a} \right) \right\} \\ &= \varepsilon \{H, G\}_{\rm PB} = 0 \end{aligned} \tag{2.77}$$

からわかる．(2.75), (2.76) を引き起こす G は無限小変換の生成子とよばれる．

2.2.6 解析力学の利点

前項まででわかったように，作用（あるいはラグランジアン，ハミルトニアン）はニュートン力学に関する物理系の情報を洩れなく含んでいる．具体的には，**変分原理により運動方程式が得られ，変換のもとでの不変性から保存則が導かれる．さらに，その保存量が無限小変換の生成子となる．**

解析力学による定式化は，一般的な変数（一般座標や一般運動量）に基づくものであるため適用範囲が広いと予想される．すなわち，特定の「対象」，「舞台」，「法則」に限定されずに様々な物理系に適用できると期待される．

対象に関しては，質点や剛体で記述される物体ばかりでなく弾性体や電磁場のような実体にも適用できる．実際，**場の古典論**を解析力学に基づいて定式化したものが**場の解析力学**である．場の解析力学の主役はラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ で，空間積分 $L = \int \mathscr{L} d^3x$ によりラグランジアン L が得られる．次節で場の解析力学について紹介する．

舞台に関しては，ニュートン力学の舞台を超えて，特殊相対性理論や一般相対性理論においても解析力学に基づく定式化が効力を発揮する．2.4 節で**相対**

論的力学とよばれる特殊相対性理論に基づく力学について紹介する．

法則に関しては，古典論にとどまらず量子論においても解析力学が有用な役割を果たす．実際，第 3 章でみるように古典論と量子論の橋渡し役をする．

2.3 場の解析力学

2.3.1 場とは

場（field）とは重力場や電磁場のように**時空**（時間と空間をまとめて時空あるいは時空間とよぶ）の関数 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, t)$ （複数の場が存在する場合や多成分を有していてそれを明記したい場合は添字を導入して，例えば，φ_a のように表す）で表される実体のことで，その変動は波動方程式に従い伝搬し周囲に影響を与える．場の関数 $f(\varphi)$ に対して，

$$f(\varphi+\varepsilon) - f(\varphi) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\varepsilon + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\varepsilon^2 + \cdots \tag{2.78}$$

のように展開したとき，$\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ を f の φ による偏微分とよぶ．ここで，$\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ は無限小の関数である．同様にして，φ，$\boldsymbol{\nabla}\varphi$，$\dot{\varphi} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ の関数 $f(\varphi, \boldsymbol{\nabla}\varphi, \dot{\varphi})$ に対しては，

$$\begin{aligned} &f(\varphi+\varepsilon, \boldsymbol{\nabla}\varphi+\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\varphi}+\varepsilon_t) - f(\varphi, \boldsymbol{\nabla}\varphi, \dot{\varphi}) \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nabla}\varphi}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}}\varepsilon_t + \cdots \end{aligned} \tag{2.79}$$

のように展開される．ここで，$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$，$\varepsilon_t$ も無限小の関数である．

$\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, t)$ を一般座標とみなして解析力学を展開しよう．$q_a(t)$ と $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ を比較すると，位置を表す連続変数である座標 $\boldsymbol{x}$ が離散的な自由度を表す a の役割を担っていることがわかる．すなわち，場の理論は無限自由度を有する解析力学の系と考えられる．ここでは，のちに相対性理論を定式化する際に便利なように，空間座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ と時間 t をまとめて扱う表記法を導入する．具体的には，$x^0 = ct$，$x^1 = x$，$x^2 = y$，$x^3 = z$ をまとめて x^μ（$\mu = 0, 1, 2, 3$）と記し，x^μ に関する微分を

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \varphi \tag{2.80}$$

のように表すことにする．ここで，$c(\doteqdot 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})$ は真空中の光の速さである．∂_μ が x^μ **に関する偏微分を表す記号である**ことに慣れよう．

2.3.2 場の方程式

変分原理に基づいて，場に関する運動方程式を導こう．作用はラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ を用いて，

$$S[\varphi] = \frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))d^4x \tag{2.81}$$

と表される．ここで，V_4 は 4 次元の閉じた領域，$d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = cdtdxdydz$ である．また，$\varphi(x) = \varphi(\boldsymbol{x}, ct)$，$\partial_\mu\varphi(x) = \partial_\mu\varphi(\boldsymbol{x}, ct)$，すなわち，$x^\mu$ を簡単のため x と記した（x^μ の x 成分と混同しないようにしよう）．

作用が極値を取る条件は，時空の内部に関する任意の変分 $\delta\varphi$ に対して，

$$\delta S[\varphi] = \delta\left\{\frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))d^4x\right\} = 0 \tag{2.82}$$

が成立することである．実際に作用を変分すると，

$$\begin{aligned}
\delta S[\varphi] &= \frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L}(\varphi + \delta\varphi, \partial_\mu\varphi + \delta(\partial_\mu\varphi))d^4x \\
&\quad -\frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))d^4x \\
&= \frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta(\partial_\mu\varphi)\right)d^4x \\
&= \frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial_\mu(\delta\varphi)\right)d^4x \\
&= \frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4}\left[\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} - \sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\right)\right\}\delta\varphi\right. \\
&\quad \left. + \sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta\varphi\right)\right]d^4x \\
&= \frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} - \sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\right)\right\}\delta\varphi d^4x \\
&\quad +\frac{1}{c}\int_{\partial\mathrm{V}_4}\left[\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta\varphi\right]dS_\mu
\end{aligned} \tag{2.83}$$

となり，$\delta S[\varphi] = 0$ が成立するためには，オイラー・ラグランジュの方程式

$$\sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} = 0 \tag{2.84}$$

が成り立つ必要がある．ここで，4 次元時空の表面（無限遠の 3 次元超曲面）$\partial\mathrm{V}_4$ では $\delta\varphi = 0$ として，(2.83) の最後の項は 0 となる．dS_μ は $\partial\mathrm{V}_4$ の面積要素である．また，変分は微分と独立したもの（$\delta(\partial_\mu\varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$）である．(2.84) は場に関する運動方程式（波動方程式）で**場の方程式**ともよばれる．

$\varphi(x)$ に正準共役な運動量の場 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)} \tag{2.85}$$

で定義される．$\mathscr{L}$ とハミルトニアン密度 $\mathscr{H}$ はルジャンドル変換

$$\mathscr{H} = \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathscr{L} \tag{2.86}$$

で結ばれる．これを用いて，作用の変分は

$$\begin{aligned}
\delta S[\varphi] &= \delta\left\{\frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4}(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H})\,d^4x\right\} \\
&= \frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4}\left[\delta\pi\left\{\dot{\varphi} - \left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\pi}\right)\right\}\right. \\
&\quad \left. - \left\{\dot{\pi} + \left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\varphi}\right)\right\}\delta\varphi\right] d^4x + \frac{1}{c}\int[\pi\delta\varphi]_{-\infty}^{\infty}\,d^3x \\
&\quad -\frac{1}{c}\int dt\int_{|\boldsymbol{x}|=\infty}\left[\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\pi}\delta\pi\right]\cdot d\boldsymbol{S}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

のように変形され，4 次元時空の表面（$t = -\infty, \infty$，$|\boldsymbol{x}| = \infty$）で固定された変分に対して最後の 2 つの項が 0 になり，$\delta S[\varphi] = 0$ が成立するためには，ハミルトンの方程式

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta H}{\delta\pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta\varphi} \tag{2.88}$$

が成り立つ必要がある．ここで，H はハミルトニアンで $\mathscr{H}$ の空間積分

$$H \equiv \int\mathscr{H}d^3x \quad (d^3x = dxdydz) \tag{2.89}$$

で定義される．また，$\dfrac{\delta H}{\delta\pi}$，$\dfrac{\delta H}{\delta\varphi}$ は汎関数微分で，それぞれ

$$\frac{\delta H}{\delta\pi} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\pi}, \quad \frac{\delta H}{\delta\varphi} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\varphi} \tag{2.90}$$

である（(A.92) 参照）．

有限自由度系の場合と同様にポアソン括弧を用いて，(2.88) は

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, H\}_{\mathrm{PB}}, \quad \dot{\pi} = \{\pi, H\}_{\mathrm{PB}} \tag{2.91}$$

のように表される．ここで，ポアソン括弧は

$$F(t) = \int\mathscr{F}(\varphi, \boldsymbol{\nabla}\varphi, \pi, \boldsymbol{\nabla}\pi)d^3x, \; G(t) = \int\mathscr{G}(\varphi, \boldsymbol{\nabla}\varphi, \pi, \boldsymbol{\nabla}\pi)d^3x \tag{2.92}$$

に対して，

$$\{F, G\}_{\mathrm{PB}} \equiv \int\left(\frac{\delta F}{\delta\varphi}\frac{\delta G}{\delta\pi} - \frac{\delta F}{\delta\pi}\frac{\delta G}{\delta\varphi}\right)d^3x \tag{2.93}$$

で定義され，

$$\begin{aligned}
&\{\varphi(\boldsymbol{x}, t), \pi(\boldsymbol{y}, t)\}_{\mathrm{PB}} = \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad \{\varphi(\boldsymbol{x}, t), \varphi(\boldsymbol{y}, t)\}_{\mathrm{PB}} = 0, \\
&\{\pi(\boldsymbol{x}, t), \pi(\boldsymbol{y}, t)\}_{\mathrm{PB}} = 0
\end{aligned} \tag{2.94}$$

が成り立つ（(A.93) 参照）．ここで，$\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ はディラックの δ 関数でその性質については A.3.2 項を参照しよう．複数の場や多成分を有する場合，例え

ば，n 成分を有する場 φ_a，π^b （$a, b = 1, \cdots, n$）に対して，ポアソン括弧は

$$\{F, G\}_{\mathrm{PB}} \equiv \int \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi_a} \frac{\delta G}{\delta \pi^a} - \frac{\delta F}{\delta \pi^a} \frac{\delta G}{\delta \varphi_a} \right) d^3x \tag{2.95}$$

で定義され，

$$\begin{aligned} &\{\varphi_a(\boldsymbol{x}, t), \pi^b(\boldsymbol{y}, t)\}_{\mathrm{PB}} = \delta_a{}^b \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad \{\varphi_a(\boldsymbol{x}, t), \varphi_b(\boldsymbol{y}, t)\}_{\mathrm{PB}} = 0, \\ &\{\pi^a(\boldsymbol{x}, t), \pi^b(\boldsymbol{y}, t)\}_{\mathrm{PB}} = 0 \end{aligned} \tag{2.96}$$

が成り立つ．これらを用いて，$F(t) = \displaystyle\int \mathscr{F}(\varphi, \boldsymbol{\nabla}\varphi, \pi, \boldsymbol{\nabla}\pi) d^3x$ は

$$\dot{F} = \{F, H\}_{\mathrm{PB}} \tag{2.97}$$

に従う．

2.3.3 ネーターの定理と保存量

時空構造を反映した対称性は座標変換のもとでの不変性として表される．具体的には，ニュートン力学の舞台において時間の一様性は時間推進 $t \to t' = t + a$（a：定数）のもとでの不変性，空間の一様性は空間推進 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ （$\boldsymbol{b}$：定ベクトル）のもとでの不変性，空間の等方性は空間回転 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$ （R：3×3 特殊直交行列）のもとでの不変性として表される．ここで，特殊直交行列とは $R^tR = I$，$RR^t = I$，$\det R = 1$ （R^t は R の転置行列）を満たす行列である．さらに，座標変換のもとでの変換性に基づいて，場が分類される．例えば，空間回転（$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$，$t' = t$）のもとで $\phi'(x') = \phi(x)$ のように不変に保たれる場はスカラー場で，$\boldsymbol{A}'(x') = R\boldsymbol{A}(x)$ のように変換する場 $\boldsymbol{A}(x)$ はベクトル場である．

場に関しても，対称性と保存則の関係は次のようにネーターの定理として定式化される．

【ネーターの定理】 x^μ および $\varphi_a(x)$（$a = 1, \cdots, n$）に関する無限小変換

$$\begin{aligned} &x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x) \quad (\varepsilon\text{: 無限小の定数}), \\ &\varphi_a(x) \to \varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \varepsilon \Xi_a(\varphi_b(x), x) \end{aligned} \tag{2.98}$$

に対して，作用積分が不変に保たれるとき，すなわち，

$$\int_{\mathrm{V}'_4} \mathscr{L}(\varphi'_a(x'), \partial'_\mu \varphi'_a(x')) d^4x' = \int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x)) d^4x \tag{2.99}$$

となるとき，保存則

$$\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu N^\mu = 0, \quad \frac{d}{dt}\mathscr{N} = 0 \tag{2.100}$$

を満たすネーターカレントとよばれる**保存カレント**（conserved current）N^μ

およびネーターチャージとよばれる**保存チャージ** (conserved charge) $\mathscr{N}$

$$N^\mu = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \left(\Xi_a - \sum_{\nu=0}^{3} \xi^\nu \partial_\nu \varphi_a \right) + \xi^\mu \mathscr{L}, \tag{2.101}$$

$$\mathscr{N} = \int N^0 d^3x \tag{2.102}$$

が存在する．ちなみに，$\xi^\mu = 0$ のときは時空とは無関係な変換のもとでの不変性で**内部対称性**とよばれる．また $\varepsilon = 0$ のときは恒等変換で，恒等変換から無限小の定数を用いて構成される変換は連続的な**大局的変換**とよばれる*3)．

定理の証明は質点の場合に行ったものを参考にして，

$$d^4x' = \left| \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \right| d^4x = \left(1 + \varepsilon \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \xi^\mu + O(\varepsilon^2) \right) d^4x \tag{2.103}$$

などを用いて実行できるので割愛する．ここで，$\left| \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \right|$ は**ヤコビ行列式**（ヤコビアン）$\det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right)$ である．また，連続の方程式 $\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu N^\mu = 0$ から，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathscr{N} &= \frac{d}{dt} \int N^0 d^3x = \int \frac{\partial N^0}{\partial t} d^3x \\ &= - \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{N} d^3x = - \oint_{|\boldsymbol{x}|=\infty} \boldsymbol{N} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \end{aligned} \tag{2.104}$$

のようにして保存則が導かれる．ここで，$\boldsymbol{N}|_{|\boldsymbol{x}|=\infty} = \boldsymbol{0}$ とした．

参考までに，(2.99) の左辺の変数を x' から x に変えることにより，

$$\int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L}(\varphi'_a(x), \partial_\mu \varphi'_a(x)) d^4x = \int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x)) d^4x \tag{2.105}$$

となる．(2.105) を用いて，ネーターの定理は次のようにも表される．

【ネーターの定理】 $\varphi_a(x)$ に関する無限小変換

$$\delta_{\mathrm{L}} \varphi_a(x) = \varphi'_a(x) - \varphi_a(x) \tag{2.106}$$

のもとで，$\mathscr{L}$ が運動方程式を用いることなく，せいぜい全微分 $\partial_\mu K^\mu$ だけ変化するとき，保存カレント

$$\varepsilon N^\mu = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta_{\mathrm{L}} \varphi_a(x) - K^\mu \tag{2.107}$$

が存在する．ここで，$\delta_{\mathrm{L}} \varphi_a(x)$ は**リー微分**（Lie derivative）とよばれるもので，(2.98) を用いて次のように表される．

$$\delta_{\mathrm{L}} \varphi_a(x) = \varphi'_a(x) - (\varphi'_a(x') - \varepsilon \Xi_a(x)) = \varepsilon \left(\Xi_a - \sum_{\mu=0}^{3} \xi^\mu \partial_\mu \varphi_a \right). \tag{2.108}$$

*3) 恒等変換から無限小の関数 $\varepsilon(x)$ を用いて構成される変換は連続的な局所的変換とよばれる（詳しくは第 5 章参照）．

2.3.3.1　具体例

時空間の並進

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu \quad (\varepsilon^\mu\text{: 無限小の定数}),$$
$$\varphi_a(x) \to \varphi'_a(x') = \varphi_a(x) \tag{2.109}$$

に対して作用積分が不変に保たれるとき，(2.102) より保存則

$$\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0, \quad T^\mu{}_\nu \equiv \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \partial_\nu \varphi_a - \delta^\mu{}_\nu \mathscr{L} \tag{2.110}$$

が得られる．ここで，$T^\mu{}_\nu$ は**正準エネルギー・運動量テンソル**とよばれる密度量である．$T^0{}_\nu$ の 3 次元積分

$$P_\nu = \int T^0{}_\nu d^3x \tag{2.111}$$

が保存量で，$\dfrac{P_0}{c}$ が系のエネルギー，(P_1, P_2, P_3) が系の運動量（に負符号が付いたもの）である．同様にして，空間回転のもとでの不変性より，角運動量保存則が導かれる（導出は省略）．

2.4　特殊相対性理論

ニュートン力学は適用限界があり，物体の速さが光の速さに近づいたとき，相対論的力学に移行する．ここで，相対論的力学とは特殊相対性理論に基づく力学である．まずは特殊相対性理論の紹介から始める．

2.4.1　事の発端

特殊相対性理論の誕生は**あらゆる慣性系において光の速さ c が一定である**という実験結果に端を発する．「力学において慣性の法則が成り立つ慣性系とよばれる系に基づいて理論を構築する」と宣言したので，光の速さに関する実験事実を真摯（しんし）に受け止める必要がある．時空座標 $(t, \boldsymbol{x})$ で表される慣性系と $(t', \boldsymbol{x}')$ で表される慣性系に対して，上述の光の速さに関する実験事実は

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right| = c \tag{2.112}$$

と表される．(2.112) が矛盾なく成立するためには，時間は空間と無関係なものではなく密接に関係し，ニュートン力学の舞台は変更を余儀（よぎ）なくされる．

2.4.2　舞台，原理，物理量

まずは，特殊相対性理論の舞台について紹介する．

特殊相対性理論の舞台はミンコフスキー時空（Minkowski space-time）とよばれる時間と空間が一体化した時空である．

以下でミンコフスキー時空の特徴について述べる．時空内に直交座標系（$\{x^\mu\}$ と表記）を設けて，任意の点を 4 つの数 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ により指定する．ここで，時間座標 t，空間座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ と x^μ の間には $t = \dfrac{x^0}{c}$，$x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$ という関係がある．

時空内の 2 点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の距離の 2 乗 ds^2 は

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.113)$$

で定義され，これがユークリッド空間の距離の 2 乗の一般化になっている（ds^2 は正定値ではないことに注意しよう）．ここで，$\eta_{\mu\nu}$ は**計量テンソル**で，

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1, \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (2.114)$$

である．$\eta_{\mu\nu}$ を行列を用いて表記すると，

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

となる．(2.113) の最後の表式で，「添字として同じギリシア文字が上下に現れたとき，和の記号を省く（$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$ を $a_\mu b^\mu$ と表記する）」という**アインシュタインの和の規約**を用いている．この規約のもとで式が簡便になり慣れると美しさが伴うようにみえるので，以後，多くの場合，何の断りもなしに用いることにする．ただし，付録ではわかりやすさを優先し，この規約を用いていない．

特殊相対性理論は次の 2 つの原理から構成される．

特殊相対性原理：あらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つ．
光速度不変の原理：あらゆる慣性系で真空中の光の速さは同一である．

ここで，慣性系とは運動の第 1 法則「物体が力を受けないとき，物体の運動状態は変化しない」が成り立つ座標系で無数に存在する．ある慣性系に対して，原点を任意の定ベクトルだけずらした系も，原点のまわりに任意の一定角度だけ回転させた系も慣性系である．さらに，慣性系に対して，任意の一定速度で直線運動している座標系も慣性系である．このような慣性系同士をつなぐ変換は，**ポアンカレ変換**（Poincaré transformation）とよばれる変換として，一括（ひとくく）りにされる．詳しくは，ポアンカレ変換は並進（$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$，a^μ：任意の定ベクトル）と**ローレンツ変換**（Lorentz transformation）に分類され，さら

に，ローレンツ変換は空間回転，**ローレンツブースト**（Lorentz boost），空間反転 ($\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$)，時間反転 ($t \to -t$) からなり，これらの変換は**ローレンツ群**（Lorentz group）とよばれる群 $O(3,1)$ を成す．ここで，ローレンツブーストとは互いに等速直線運動している座標系の間の変換である．

2 つの慣性系 $\{x^\mu\}$ と慣性系 $\{x'^\mu\}$ において，光速度不変の原理より，

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right| = c, \text{ すなわち, } ds^2 = ds'^2 = 0 \tag{2.116}$$

が導かれる．**あらゆる慣性系で** ds^2 **は同じ値を取る**とすると，慣性系 $\{x^\mu\}$ と慣性系 $\{x'^\mu\}$ は，線形変換

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{2.117}$$

を通して結ばれる．ここで，a^μ は任意の定ベクトル（の成分）である．$\Lambda^\mu{}_\nu$ は

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{2.118}$$

を満たす変換行列で各成分は定数である．実際に，(2.117) と (2.118) を用いて，

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu}d(\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha + a^\mu)d(\Lambda^\nu{}_\beta x^\beta + a^\nu) \\ &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = ds^2 \end{aligned} \tag{2.119}$$

が成り立つ．

(2.118) の両辺の行列式を計算することにより，$(\det\Lambda^\mu{}_\nu)^2 = 1$ が導かれる．また，(2.118) の両辺の (0,0) 成分を書き下すと，$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2 = 1$ が得られる．よって，ローレンツ群は 4 種類の連結成分 (a) $\det\Lambda^\mu{}_\nu = 1$，$\Lambda^0{}_0 \geq 1$，(b) $\det\Lambda^\mu{}_\nu = -1$，$\Lambda^0{}_0 \geq 1$，(c) $\det\Lambda^\mu{}_\nu = 1$，$\Lambda^0{}_0 \leq 1$，(d) $\det\Lambda^\mu{}_\nu = -1$，$\Lambda^0{}_0 \leq 1$ からなることがわかる．恒等変換から無限小変換を逐次行うことにより得られるローレンツ変換（(2.117) で $a^\mu = 0$ としたときの変換）は**本義ローレンツ変換**（proper orthochronous Lorentz transformation）とよばれ，ローレンツ群の部分群（**本義ローレンツ群** $O_+^\uparrow(3,1)$）を成す．その元は単位元を含み $\det\Lambda^\mu{}_\nu = 1$ および $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ を満たし，ローレンツブーストと空間回転からなる．ここで，x 軸方向のローレンツブーストと z 軸のまわりの空間回転を紹介する．

(例 1) x 軸方向のローレンツブースト

変換行列は

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.120}$$

で与えられる．ここで，ω はローレンツ角とよばれるパラメータで，座標系間の相対速度の大きさ v と

$$\sinh\omega = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \cosh\omega = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{2.121}$$

のような関係がある．座標変換は

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \tag{2.122}$$

である．

(例 2) z 軸のまわりの空間回転

変換行列は

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.123}$$

で与えられる．ここで，θ は回転角で定数とする．座標変換は

$$\begin{aligned} t' &= t, \quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z' = z \end{aligned} \tag{2.124}$$

である．

ポアンカレ変換により慣性系同士が結ばれるから，**特殊相対性原理は「ポアンカレ変換のもとで理論が不変である」，すなわち，「ポアンカレ変換のもとで方程式が同じ形を取る」**と読み替えられる．このように方程式がポアンカレ変換のもとで同じ形を取る性質は**相対論的共変性**とよばれる．ただし，弱い相互作用をする素粒子を含む物理系において空間反転や時間反転に対して物理法則の不変性が成立しない例が見つかっているため，「理論は並進と本義ローレンツ変換（ローレンツブースト，空間回転）のもとで不変である」という要請を課すことにする．

本義ローレンツ変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ （$\det\Lambda^\mu{}_\nu = 1$，$\Lambda^0{}_0 \geq 1$）のもとでの変換性に基づいて，特殊相対性理論で扱う物理量は次のように分類される．

(a) スカラー Θ，スカラー場 $\phi(x)$：本義ローレンツ変換のもとで，

$$\Theta' = \Theta, \quad \phi'(x') = \phi(x) \tag{2.125}$$

のように不変な量である．

(b) 反変ベクトル（その成分を V^μ とする），反変ベクトル場（その成分を $A^\mu(x)$ とする）：成分が dx^μ と同じ変換性

$$V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu, \quad A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{2.126}$$

に従う量である．

(c) 共変ベクトル（その成分を V_μ とする），共変ベクトル場（その成分を $A_\mu(x)$ とする）：成分が $\partial/\partial x^\mu$ と同じ変換性

$$V'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu V_\nu \equiv \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu, \quad A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \tag{2.127}$$

に従う量である．ここで，変換行列 $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ は $\Lambda^\mu{}_\nu$ の逆行列 $(\Lambda^\mu{}_\lambda(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\lambda\Lambda^\lambda{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu)$ で $\Lambda_\mu{}^\nu$ と記す．

(d) i 階反変 j 階共変テンソル場（その成分を $A^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j}(x)$ とする）：本義ローレンツ変換のもとで，

$$\begin{aligned}&A'^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j}(x')\\&\quad= \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\cdots\Lambda^{\mu_i}{}_{\alpha_i}\Lambda_{\nu_1}{}^{\beta_1}\cdots\Lambda_{\nu_j}{}^{\beta_j}A^{\alpha_1\cdots\alpha_i}{}_{\beta_1\cdots\beta_j}(x)\end{aligned} \tag{2.128}$$

に従う量である．(2.128) の変換性を示し，x^μ に依存しない量は i 階反変 j 階共変テンソルでその成分は $T^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j}$ である．

ちなみに，(2.118) から $\eta_{\lambda\sigma} = \Lambda_\lambda{}^\alpha\Lambda_\sigma{}^\beta\eta_{\alpha\beta}$ が導かれ，$\eta_{\mu\nu}$ は定数の成分をもつ 2 階共変テンソルであることがわかる．$A^\mu(x)$ と $A_\mu(x)$ は $\eta_{\mu\nu}$ やその逆である $\eta^{\mu\nu}$ を通して，$A_\mu(x) = \eta_{\mu\nu}A^\nu(x)$，$A^\mu(x) = \eta^{\mu\nu}A_\nu(x)$ で結び付けられる．以後，「成分」という言葉を省いたりする場合がある．

方程式の各項がローレンツ変換のもとで同じ変換性をもつとき，方程式は特殊相対性原理を満たす．例えば，$S^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j}$，$T^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j}$，$U^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j}$ が同じローレンツ変換性をもつテンソルであるとし，これらの間に，

$$S^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j} = aT^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j} + bU^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j} \quad (a, b : \text{スカラー}) \tag{2.129}$$

が成り立つとき，ローレンツ変換で結び付く別の慣性系 $\{x'^\mu\}$ で

$$S'^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j} = a'T'^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j} + b'U'^{\mu_1\cdots\mu_i}{}_{\nu_1\cdots\nu_j} \tag{2.130}$$

が成立し，方程式がローレンツ変換のもとで共変であることがわかる．

2.4.3 相対論的力学

質量 m の物体の運動を記述する相対論的力学を構成しよう．相対性原理を満たす運動方程式を書き下すために，4 **元運動量**（four-momentum）を

$$p^\mu \equiv m\frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad p_\mu \equiv m\frac{dx_\mu}{d\tau} \tag{2.131}$$

で定義する．ここで，τ は**固有時**（proper time）とよばれるローレンツ変換のもとで不変な量（ローレンツ不変量）で，ds^2 を用いて，

$$d\tau^2 \equiv \frac{ds^2}{c^2} = \frac{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{c^2} = \frac{dx^\mu dx_\mu}{c^2} \tag{2.132}$$

で定義される．p^μ，p_μ はそれぞれ (2.126)，(2.127) と同じ変換をすることに

注意しよう．(2.132) から

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2}\,dt = \sqrt{1-\beta^2}\,dt \tag{2.133}$$

が導かれる．ここで，$\dfrac{dx^\mu}{dt} = \left(c, \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right) = (c, \boldsymbol{v})$，$\beta = \dfrac{v}{c}$，$v = |\boldsymbol{v}|$ を用いた．また，$\dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ は 4 **元速度**（four-velocity）である．物体が静止してみえる座標系において，$\dfrac{ds^2}{c^2} = dt^2$ であるから，τ は物体と一緒に運動する時計が示す時間である．(2.131) と (2.132) を用いて，

$$p^\mu p_\mu = m^2 \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = m^2c^2 \tag{2.134}$$

が導かれ，$p^\mu p_\mu$ が定数であることがわかる．

運動の第 2 法則「物体にはたらく力は物体の運動量の変化に等しい」に基づいて，運動方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \tag{2.135}$$

が成り立つとする．ここで，$f^\mu = (f^0, \boldsymbol{f})$ は 4 **元力**である．(2.135)，(2.131) を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(p^\mu p_\mu) &= \frac{d}{d\tau}(\eta^{\mu\nu}p_\nu p_\mu) = \eta^{\mu\nu}\frac{dp_\nu}{d\tau}p_\mu + \eta^{\mu\nu}p_\nu\frac{dp_\mu}{d\tau}\\ &= 2\eta^{\mu\nu}\frac{dp_\nu}{d\tau}p_\mu = 2\frac{dp^\mu}{d\tau}p_\mu = 2f^\mu p_\mu = 2mf^\mu\frac{dx_\mu}{d\tau}\\ &= 2m\left(f^0c\frac{dt}{d\tau} - \boldsymbol{f}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right) = 2m\frac{dt}{d\tau}\left(f^0c - \frac{d\tau}{dt}\boldsymbol{f}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right) = 0\end{aligned} \tag{2.136}$$

が導かれる．$p^\mu p_\mu$ が定数（m^2c^2）であることを用いて，最後に 0 と記した．また，(2.135) の第 0 成分を $c\tau$ に関して積分し，$f^0c = \dfrac{d\tau}{dt}\boldsymbol{f}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}$ を用いて，

$$p^0c = \int f^0 cd\tau = \int \frac{d\tau}{dt}\boldsymbol{f}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}d\tau = \int \frac{d\tau}{dt}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{2.137}$$

が導かれる．ここで，$\dfrac{d\tau}{dt}\boldsymbol{f} = \sqrt{1-\beta^2}\boldsymbol{f}$ がニュートン力学における力 $\boldsymbol{F}$ に相当し，$\displaystyle\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x}$ は力がする仕事である．よって，p^0c は**エネルギー** E である．

$E = p^0c = p_0c$ を用いて，(2.134) は

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{2.138}$$

と表される．(2.134) や (2.138) を，4 **元運動量の関係式**とよぶことにする．E，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{v}$，$\beta(=v/c)$ を用いて表すと，それぞれ

$$\begin{aligned}E &= p^0c = m\frac{dx^0}{d\tau}c = mc^2\frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots,\end{aligned} \tag{2.139}$$

$$\boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.140}$$

となる．(2.139) の右辺第 1 項は**静止エネルギー** (rest energy)，第 2 項はニュートン力学における運動エネルギーに相当する．v に関するより高次の項は $\cdots$ に含まれる．β が 0 の極限で，$\boldsymbol{p}$ はニュートン力学における運動量 $m\boldsymbol{v}$ に帰着する．

$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ を用いて，自由粒子に関する運動方程式 $\dfrac{dp^\mu}{d\tau} = 0$ は

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad \text{あるいは} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right) = \boldsymbol{0} \tag{2.141}$$

と表される．2 番目の式は $\dfrac{d}{d\tau} = \dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{d}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\dfrac{d}{dt}$ を用いて，1 番目の式から導かれる．

解析力学に基づいて，相対論的力学を定式化しよう．ラグランジュ形式において，$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ を一般座標として採用すると，作用積分は

$$\begin{aligned} S &= -mc^2\int d\tau = -mc\int ds = -mc\int\sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \\ &= -mc\int\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}d\lambda \qquad (2.142) \\ &= -mc^2\int\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2}\,dt = \int Ldt \qquad (2.143) \end{aligned}$$

で与えられる．**作用積分が固有時，あるいは移動距離に比例する**ことに注目しよう．ここで，λ は任意パラメータで，2 行目から 3 行目に移るところで $\lambda = t$ とした．実際，$\lambda = \tau$ として，(2.142) を x^μ で変分し，$\eta_{\mu\nu}\dfrac{dx^\mu}{d\tau}\dfrac{dx^\nu}{d\tau} = c^2$ を用いることにより，オイラー・ラグランジュの方程式として (2.141) の前者の式を導くことができる．また，(2.143) を $\boldsymbol{x}$ で変分することにより，後者の式を導くことができる．$\boldsymbol{x}$ に正準共役な運動量 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}$ は (2.140) で与えられた $\boldsymbol{p}$ と一致する．ここで，$\dot{\boldsymbol{x}} = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}(= \boldsymbol{v})$ である．

次にハミルトン形式に移る．ルジャンドル変換を用いて，ハミルトニアン

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - L = c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2c^2} \tag{2.144}$$

が導かれる．計算の途中で，(2.140) から得られる公式 $\left(\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2 = \dfrac{c^2\boldsymbol{p}^2}{(\boldsymbol{p}^2 + m^2c^2)}$ を用いた．ハミルトンの正準方程式は (2.141) と等価である．また，$H = E(> 0)$ として (2.144) から (2.138) が導かれる．

このようにして，特殊相対論的な自由粒子は固有時が停留点を取るような経路をたどり，4 元運動量の関係式

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$$

に従うことがわかった！また，**作用積分が本義ローレンツ変換のもとで不変な量であるとき，作用積分から変分原理を用いて導かれる運動方程式は自動的に本義ローレンツ変換のもとで共変な方程式となることもわかった！**

2.4.4 ラグランジアン密度に関する要請

相対論的な場は本義ローレンツ変換に基づいて (2.125) から (2.128) のように分類される．ここでは，相対論的な場の理論において，ラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ の一般的な特徴，あるいは $\mathscr{L}$ を構成する際に課される要請を列挙する．

- $\mathscr{L}$ は $\varphi(x)$ と $\partial_\mu \varphi(x)$ の関数である．
- $S = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L} d^4x$ に変分原理を適用することにより，波動方程式（場の方程式）が導かれる．
- $\mathscr{L}$ は実数値を取る．
- $\mathscr{L}$ は並進 ($x'^\mu = x^\mu + a^\mu$，a^μ：定ベクトル）のもとで不変である．すなわち，$\mathscr{L}$ は x^μ をあらわに含まない．
- $\mathscr{L}$ は本義ローレンツ変換のもとで不変である．
- $\mathscr{L}$ は物理系が有するその他の対称性に関する変換のもとで不変である．

2.5 振り返りと見通し

この章では，

- ラグランジアン密度とは何か？
- なぜ，ラグランジアン密度を扱うのか？
- ラグランジアン密度はどのようにして決まるのか？

という疑問を念頭に置いて，ラグランジアン密度の重要性を強調するために，物体，場，力の形態を特定せずに古典論に基づき一般論を展開した．わかったことは，作用積分 S はラグランジアン L の時間積分

$$S = \int L dt \tag{2.145}$$

で表されること，場の理論の場合はラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ の 4 次元積分

$$S = \frac{1}{c}\int_{\mathrm{V}_4} \mathscr{L} d^4x \tag{2.146}$$

で表されること，さらに着目する物理系の情報が S（あるいは L，$\mathscr{L}$）に集約されることである．具体的には，次のような特徴を有している．

- 変分原理により運動方程式・波動方程式が得られる．その際，物体の運動・場の変動は作用積分が極値を取るような経路・配位をたどる・しめる．
- 連続的な大局的変換のもとで作用積分が不変に保たれるとき，保存量が存在する．さらに，保存量が無限小変換の生成子となる．

このような特徴が「ラグランジアン密度とは何か？」および「なぜ，ラグラ

ンジアン密度を扱うのか？」というの問いかけに対する答えである．「ラグランジアン密度はどのようにして決まるのか？」については，前項で述べた一般的要請のもとで，「変分原理を適用したとき運動方程式・波動方程式が導かれるように決める」および「物理系のすべての対称性と両立するように決める」という答えが考えられる．ここで，次のような疑問が生じる．

- ラグランジアン密度は一意的に決まるのか？

この答えは「ラグランジアン密度は一意的には決まらない」で，具体例として，(2.142) の代わりに

$$S = -\frac{1}{2}\int \left(e^{-1}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + em^2c^2\right) d\lambda \tag{2.147}$$

を用いて，相対論的自由粒子の運動を記述することができる．ここで，$e = e(\lambda)$ は補助変数で，e に関する変分より，

$$e = \frac{1}{mc}\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} \tag{2.148}$$

が導かれ，これを (2.147) に代入して e を消去することにより，(2.147) が (2.142) に戻る．それぞれの作用積分には一長一短がある．(2.142) は世界線の距離に比例するという幾何学的意味をもつが，質量 0 の粒子には適用できない．また，根号を含んでいて扱いづらい．一方，(2.147) は質量 0 の粒子にも適用できる，根号を含まず扱いやすいという利点をもつ．実際，$m = 0$ のとき，e，x^μ に関する変分より，それぞれ

$$\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d}{d\lambda}\left(e^{-1}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) = 0 \tag{2.149}$$

が導かれ（λ に関する任意性を用いて $e = 1$ と選ぶと，第 2 式は $\dfrac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0$ となる），第 1 式から質量 0 の粒子の軌道は $ds^2 = 0$ を満たすことがわかる．

また，次のような素朴な疑問が残る．

- 変分原理はなぜ有効なのか？

さらに，相対論的な場は本義ローレンツ変換に基づいて (2.125) から (2.128) のように分類された．ここで，次のような疑問が生じる．

- どのような相対論的な場が実在するのか？
- そのような場はどんな方程式に従うのか？どんな相互作用を受けるのか？
- そのような場を含む物理系はどんな対称性や保存量を有するのか？

もっと細かい疑問として，

- 変換パラメータが時空に依存するような局所的変換（例えば，(2.98) における無限小の定数 ε を無限小の関数 $\varepsilon(x)$ に置き換えた変換）のもとで作用積分が不変に保たれるとき，どうなるのか？

これらの疑問については，次章以降で答えを見いだす．

兎(と)にも角(かく)にも，$\mathscr{L}$ を用いた物理系の記述が理にかなっていることが納得で

きたことと思う．そこで次のステップに移ろう．目標は万物の根源（素粒子）に関する標準数式を理解することで，1.3 節で提示した次の 3 つの問いかけに答える必要がある．

- 万物の根源は何か？
- 万物の根源が従う原理や法則は何か？
- いかに記述するか？

目標達成のために，この章のとはほぼ正反対の戦略を採ることになる．すなわち，万物の根源の特定が課題となる．ご存知のように，身のまわりの物質は原子でできていて，原子は原子核と電子で，さらに原子核は陽子と中性子で構成されている．万物の根源のさらなる探求は第 6 章以降で行う．次章では電子を軸にはするが，この章で用いた戦略を踏襲（とうしゅう）する．すなわち，微視的な世界で素粒子が従う一般的な原理や法則およびそれらを記述する理論的枠組について考察する．

第 3 章
量子物理学

「ψ（場の演算子）が何を表しているのか？」を理解するために，量子力学，相対論的量子力学，場の量子論について紹介する．ψ の役割と意味するものに注目しながら読み進めてほしい．

3.1 量子力学

微視的なレベルで，古典力学や電磁気学を含む古典物理学（古典論）は修正を受けて，量子力学，相対論的量子力学，量子電磁力学を含む量子物理学（量子論）に取って代わる．ここで，**量子力学**（quantum mechanics）とはニュートン力学の量子論ともいうべきものである．

3.1.1 事の発端

古典論から量子論への移行も光に関する物理現象に端を発する．それは黒体放射に関する次の問題に集約される．

黒体放射の問題：空洞内に存在する電磁波のエネルギー密度を求めよ．

この問題に対して，**プランクの公式**が実験結果をよく再現する．プランクの公式とは，温度 T の熱平衡状態にある空洞内における，振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある電磁波のエネルギー密度 $u(\nu, T)d\nu$ に関する公式で

$$u(\nu, T)d\nu = f_\nu \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{3.1}$$

と表される．ここで，f_ν は振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある電磁波の単位体積当たりの固有振動の数で $f_\nu = \dfrac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$ である．また，h（$\fallingdotseq 6.63 \times 10^{-34}$ J·s）は**プランク定数**，k（$\fallingdotseq 1.38 \times 10^{-23}$ J·K^{-1}）はボルツマン定数である．プランクの公式の背後にあるのは**エネルギー量子仮説**で次のように表される．

> **エネルギー量子仮説**：振動数 ν をもつ電磁波の固有振動のエネルギーが取り得る値は $E_n(\nu) = nh\nu$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）である．

実際，正準分布に関する平均値の公式に代入して，

$$E(\nu)_{平均} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\nu) e^{-\frac{E_n(\nu)}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n(\nu)}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (3.2)$$

が導かれ，これに f_ν を掛けることによりプランクの公式が得られる．

さらに，アインシュタイン（A. Einstein）により，光に関する次のような仮説が導入された．

> **光量子仮説**：振動数 ν の光は光子（光量子）とよばれるエネルギー $E_\gamma = h\nu$ をもつ光の粒子の集まりである．

この仮説に基づき，**光電効果**の機構が理解された．光電効果とは紫外線などの高い振動数（短い波長）をもつ光を金属に当てるとその表面から電子が飛び出す現象で，**光子が金属表面の電子に個別に衝突することにより起こり，その際に力学的エネルギーの保存則**

$$h\nu = E_e + W \quad (3.3)$$

が成り立つとして理解される．ここで，E_e は電子の運動エネルギー，W は原子が電子を束縛するのに必要なエネルギーで**仕事関数**とよばれる．このようにして，光は粒子性を合わせもつことがわかる．

光子の質量は 0 で 4 元運動量の関係式（$\boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4 = E^2$）より，

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (3.4)$$

が導かれる．ここで，p_γ は光子の運動量の大きさ，λ は光の波長である．

「波と考えられていた光が粒子として振る舞うならば，粒子と考えられる電子は波としても振る舞うのではないだろうか．そして，光に関する関係式 $E_\gamma = h\nu$ および $p_\gamma = \dfrac{h}{\lambda}$ が，電子の場合にも成立するのではないだろうか.」という予想が生まれる．このような予想はド・ブロイ（de Broglie）により次のような仮説として提案された．

> **物質波仮説**：運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ物質粒子は波長 $\lambda = \dfrac{h}{p}$ をもつ波として振る舞う．ここで，$p = |\boldsymbol{p}|$ である．このような波は**物質波**とよばれ，物質波の波長は**ド・ブロイ波長**とよばれる．

物質粒子として電子に焦点を当てて考察する．電子の質量を m_e，速さを v，電子を波とみなした場合の振動数を ν_e，波長を λ_e とする．ニュートン力学が成り立つ場合，自由な電子のエネルギー E と運動量の大きさ p に関して

$$E = \frac{p^2}{2m_e}, \quad p = m_e v \tag{3.5}$$

が成り立つ．電子を波と考えた場合，物質波仮説に基づき

$$E = h\nu_e, \quad p = \frac{h}{\lambda_e} \tag{3.6}$$

が成り立つとして，電子の波（電子波）が満たす方程式を求めよう．簡単のため，空間は 1 次元（その座標を x とする）とし，波の進行方向を x 軸の正の向きに選ぶ．E と p は一定なので，(3.6) より ν_e や λ_e も一定である．このとき，電子波を表す波動関数 ψ は複素数に値をもつとして指数関数を用いて，

$$\psi = Ae^{2\pi i\left(\frac{x}{\lambda_e} - \nu_e t\right)} = Ae^{\frac{2\pi i}{h}(px - Et)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \tag{3.7}$$

のように表されるとする．ここで，$\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$（$\fallingdotseq 1.05 \times 10^{-34}$ J·s）は**換算プランク定数**である．(3.7) より，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi, \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi = p\psi \tag{3.8}$$

が成り立つ．よって，**電子のエネルギーや運動量は ψ に作用する微分演算子とみなされる**．電子がポテンシャル $V(x)$ を受けて運動する場合，力学的エネルギーは $E = \dfrac{p^2}{2m_e} + V(x)$ で与えられる．このときも (3.8) が成り立つとすると，ψ が従う方程式は，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t) \tag{3.9}$$

となる．$V(x) \neq 0$ のとき，(3.7) はもはや解ではないことに注意しよう．さらに，3 次元空間では $E = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} + V(\boldsymbol{x})$ が成立し，電子波が従う方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{3.10}$$

となる．ここで，運動量 $\boldsymbol{p}$ を波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ に作用する微分演算子 $-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ とした．(3.10) は**シュレーディンガー方程式**（Schrödinger equation）とよばれ，非相対論的な量子力学の基礎方程式である．

このようにエネルギーと運動量に関する関係式に対して，置き換え

$$E \;\Rightarrow\; i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{p} \;\Rightarrow\; -i\hbar\boldsymbol{\nabla} \tag{3.11}$$

を施し，関係式を波動関数に作用させることにより，波の性質を合わせもつ粒子に関する波動方程式を得ることができる．ここまでの考察で重要な点は，「電子を記述する波動関数が一般に複素数の値をもつこと」と「エネルギーや運動量が演算子で表されること」である．

3.1.2 対象，舞台，要素

量子力学の対象と舞台と要素について紹介する．

量子力学の主な対象は微視的な世界の物体（電子，原子，分子など）である．理想化や単純化のため，多くの場合，質点として扱われる．

非相対論的な場合，舞台はニュートン力学と同じでユークリッド空間と絶対時間である．相対論的な場合，舞台はミンコフスキー時空である．

量子力学は次のような 3 つの要素からなる．

物理状態：ヒルベルト空間の元．
物理量：エルミート演算子．
測定値：物理状態における物理量の期待値．

物理状態は**ヒルベルト空間**（Hilbert space）の元で重ね合わせの原理に従う．ヒルベルト空間は有限な内積の構造を備えた線形空間で，その元はベクトルとみなされる．ベクトルは特定の表示を選ぶことにより，成分で表示される．物理状態の場合，位置表示を用いることにより，**波動関数** $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ で指定される（A.5.4 参照）．非相対論的な場合，$\psi(\boldsymbol{x}, t)$ が従う方程式はシュレーディンガー方程式 (3.10) である．(3.10) の一般解について説明する．解として変数分離型 $\psi(\boldsymbol{x}, t) = T(t)\varphi(\boldsymbol{x})$ を想定し，(3.10) に代入すると，

$$i\hbar\frac{dT(t)}{dt} = ET(t), \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{x})\right)\varphi(\boldsymbol{x}) = E\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{3.12}$$

が導かれ，第 1 式から $T(t) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}Et}$（$C$：定数）が得られる．また (3.12) の第 2 式はエネルギー E を固有値とする固有値方程式で時間に依存しないシュレーディンガー方程式ともよばれる．固有値方程式の解として，固有値 E_n とその固有関数 $\varphi_n(\boldsymbol{x})$ の完全系が求まったとする．このとき，(3.10) は波動関数に関して線形の方程式なので重ね合わせの原理に従い，一般解は

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \sum_n c_n \varphi_n(\boldsymbol{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \tag{3.13}$$

のように構成される．ここで，係数 c_n は任意の定数である．エネルギー固有値が連続的な値を取る場合は，和が積分に代わる．

物理量は**エルミート演算子**（Hermitian operator）で表される．ここで，エルミート演算子とは (A.175) を満たす演算子でその固有値はすべて実数である．具体的な物理量を記載する際に，「演算子」という言葉を省くことがある．

測定値は物理状態における物理量に関する**期待値**である．$\psi(\boldsymbol{x}, t)$ で指定される物理状態において，エルミート演算子 Ω で表される物理量の期待値は

$$\langle \Omega \rangle \equiv \int \psi^*(\boldsymbol{x}, t)\Omega\psi(\boldsymbol{x}, t)d^3x \tag{3.14}$$

で定義される．ここで，$\psi^*(\boldsymbol{x}, t)$ は $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ の複素共役を表す．

波動関数 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ は複素数に値をもつ関数で，波動関数そのものは観測量ではない．(3.10) の左辺に虚数単位 i が存在することに注意しよう．以下，多くの場合，$\psi(\boldsymbol{x}, t)$ は電子を記述する波動関数とする．観測に関する標準的な考

え方は確率解釈と波束の収縮からなる．

【確率解釈】 電子が時刻 t において位置 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ の間に観測される確率 $P(\boldsymbol{x},t)$ は

$$P(\boldsymbol{x},t) = |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2 d^3x \tag{3.15}$$

で与えられる．ここで，$\psi(\boldsymbol{x},t)$ は $\int |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2 d^3x = 1$ のように規格化されているとした．

【波束の収縮】 我々が観測しないとき，電子はシュレーディンガー方程式に従い波のように振る舞う．電子を観測すると，電子波は収縮して粒子として振る舞う．すなわち，瞬時のうちに局在化した状態に移行する．

(3.15) より，$\rho \equiv |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2$ は電子が時刻 t に位置 $\boldsymbol{x}$ で観測される確率密度を表し，**確率の保存則**を表す連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{3.16}$$

を満足する．ここで，$\boldsymbol{j}$ は確率の流れで，

$$\boldsymbol{j} \equiv -\frac{i\hbar}{2m}\left\{\psi^*(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{x},t) - (\boldsymbol{\nabla}\psi^*(\boldsymbol{x},t))\,\psi(\boldsymbol{x},t)\right\} \tag{3.17}$$

で定義される．実際に，ρ と $\boldsymbol{j}$ の定義式を (3.16) に代入し，(3.10) とその複素共役の方程式を用いて，ポテンシャルが実数値（$V(\boldsymbol{x}) = V^*(\boldsymbol{x})$）を取るとき (3.16) が成り立つことが示される．系の対称性に付随する保存則は運動方程式（波動方程式）のもとで成立することに注意しよう．

$\psi(\boldsymbol{x},t)$ が Ω の固有関数 $\phi_n(\boldsymbol{x})$ を用いて，

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(\boldsymbol{x}) \tag{3.18}$$

のように展開されるとき，規格化条件より，

$$\begin{aligned}\int |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2 d^3x &= \int \sum_{m,n} a_m^*(t)a_n(t)\phi_m^*(x)\phi_n(x)d^3x \\ &= \sum_n |a_n(t)|^2 = 1\end{aligned} \tag{3.19}$$

が導かれる．ここで，$\phi_n(\boldsymbol{x})$ は正規直交完全系を張っているとした．すなわち，

$$\int \phi_m^*(\boldsymbol{x})\phi_n(\boldsymbol{x})d^3x = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n), \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\sum_n \phi_n(\boldsymbol{x})\phi_n^*(\boldsymbol{y}) = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3.21}$$

とした．同様にして，Ω の固有値 ω_n （$\Omega\phi_n = \omega_n\phi_n$）を用いて，

$$\langle \Omega \rangle = \sum_n |a_n(t)|^2 \omega_n \tag{3.22}$$

が導かれる．(3.19)，(3.22) より，$|a_n(t)|^2$ は物理状態 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ において時刻 t で Ω を観測して ω_n という値を得る確率を与え，$\langle\Omega\rangle$ は Ω の期待値を与えると理解される．「確率の和が 1 であること」と「期待値は固有値とその確率の積を総和したものであること」を思い出そう．

3.1.3 ハイゼンベルク表示

ハイゼンベルク表示（Heisenberg representation）において，物理状態は時間依存性をもたない（$\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x},0)$）．一方，演算子は

$$\Omega_{\mathrm{H}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\Omega e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{3.23}$$

で定義され，Ω があらわに時間に依存しない場合は，

$$\frac{d}{dt}\Omega_{\mathrm{H}}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\Omega_{\mathrm{H}}(t), H] \tag{3.24}$$

に従って時間発展する．ここで，$[H, \Omega_{\mathrm{H}}(t)]$ は**交換子**とよばれる演算子の間の非可換性を表す量で，

$$[A,B] \equiv AB - BA \tag{3.25}$$

で定義される．実際，(3.23) の両辺を t で微分することにより，(3.24) が得られる．参考までに，Ω があらわに時間に依存する場合は，

$$\frac{d}{dt}\Omega_{\mathrm{H}}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\Omega_{\mathrm{H}}(t), H_{\mathrm{H}}(t)] + \left(\frac{\partial\Omega(t)}{\partial t}\right)_{\mathrm{H}} \tag{3.26}$$

に従って時間発展する．(3.24) や (3.26) は**ハイゼンベルクの運動方程式**（Heisenberg's equation of motion）とよばれる．

シュレーディンガー表示との違いは記述の仕方の違いにすぎず，物理的には等価である．実際に，いずれの表示においても物理量の期待値は

$$\int \psi^*(\boldsymbol{x},t)\Omega\psi(\boldsymbol{x},t)d^3x = \int \psi_{\mathrm{H}}^*(\boldsymbol{x})\Omega_{\mathrm{H}}(t)\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x})d^3x \tag{3.27}$$

のように同じ値を与える．ここで，$\psi(\boldsymbol{x},t)$ はシュレーディンガー表示における（シュレーディンガー方程式に従う）波動関数で，$\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x})$ との間に，

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(\boldsymbol{x},0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}) \tag{3.28}$$

が成り立つ．(3.24) は

$$\frac{d}{dt}\Omega_{\mathrm{H}}(t) = \frac{1}{i\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}Ht}[\Omega, H]e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{3.29}$$

と書き換えられるため，$[\Omega, H] = 0$ のとき $\frac{d}{dt}\Omega_{\mathrm{H}}(t) = 0$ となり，Ω は保存量となる．この場合，

$$H\Omega\varphi(\boldsymbol{x}) = \Omega H\varphi(\boldsymbol{x}) = \Omega E\varphi(\boldsymbol{x}) = E\Omega\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{3.30}$$

が成り立つため，固有値 E_n に対して，固有関数 $\varphi_n(\boldsymbol{x})$ と $\Omega\varphi_n(\boldsymbol{x})$ が存在する．ここで，$\varphi_n(\boldsymbol{x})$ と $\Omega\varphi_n(\boldsymbol{x})$ は異なる状態であるとする．このように，1つの固有値に独立な複数の固有関数が存在することを**縮退**（degeneracy）とよび，保存量・対称性の存在が縮退の起源となる．ここで，保存量と対称性の関係について述べる．Ω を生成子とする変換のもとで，ハミルトニアン H は $H' = e^{-\frac{i}{\hbar}a\Omega}He^{\frac{i}{\hbar}a\Omega}$ （a：実定数）に移る．Ω が保存量の場合，$[\Omega, H] = 0$ から Ω による変換のもとでの H の不変性（$H' = H$），すなわち，H で記述される物理系の対称性が導かれる．

ハミルトンの運動方程式 (2.55) とハイゼンベルクの運動方程式 (3.26) の類似性から次のような考えに至る．**(2.55) を基にして，物理量をエルミート演算子とし，ポアソン括弧を交換子に置き換える，すなわち，**

$$\{A, B\}_{\mathrm{PB}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}[A, B] \tag{3.31}$$

を行うことにより，古典論から量子論に移行できる．このような量子化の手続きが**正準量子化**である．一般座標 q_a と一般運動量 p^a に関する関係式

$$\{q_a, p^b\}_{\mathrm{PB}} = \delta_a{}^b, \quad \{q_a, q_b\}_{\mathrm{PB}} = 0, \quad \{p^a, p^b\}_{\mathrm{PB}} = 0 \tag{3.32}$$

に (3.31) を適用すると，

$$[q_a, p^b] = i\hbar\delta_a{}^b, \quad [q_a, q_b] = 0, \quad [p^a, p^b] = 0 \tag{3.33}$$

に置き換わる．(3.33) は**量子条件**（quantum condition）とよばれる．

3.1.4 調和振動子

固有値方程式の具体的な解を例証するために，1次元の調和振動子に関するエネルギー準位について考察する．座標を x，運動量を p と表す．解くべき固有値方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{3.34}$$

である．ここで，m，ω はそれぞれ振動子の質量，角振動数である．ω を用いて，振動数 ν は $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ と表される．x と p から，

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \tag{3.35}$$

で定義される演算子 a および $a^\dagger$ を用いて，ハミルトニアンは

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{3.36}$$

と表される．ここで，$a^\dagger$ は a のエルミート共役演算子である（(A.176) 参照）．a，$a^\dagger$ はエルミート演算子ではないが，$a + a^\dagger$，$i(a - a^\dagger)$ はエルミート演算子

であることに注意しよう．x，p は $[x,p]=i\hbar$，$[x,x]=0$，$[p,p]=0$ を満たし，a，$a^\dagger$ は

$$[a,a^\dagger]=1,\quad [a,a]=0,\quad [a^\dagger,a^\dagger]=0 \tag{3.37}$$

を満たす．(3.37) および公式

$$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B \tag{3.38}$$

を用いて，$N\equiv a^\dagger a$ に対して，

$$[N,a]=-a,\quad [N,a^\dagger]=a^\dagger \tag{3.39}$$

が得られる．さらに，$H=\hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)$ および $H\phi_E=E\phi_E$ を用いて，

$$Ha\phi_E=(aH-\hbar\omega a)\phi_E=(E-\hbar\omega)a\phi_E, \tag{3.40}$$

$$Ha^\dagger\phi_E=(a^\dagger H+\hbar\omega a^\dagger)\phi_E=(E+\hbar\omega)a^\dagger\phi_E \tag{3.41}$$

が導かれ，a が作用したときエネルギーの値が $\hbar\omega$ だけ減少し，$a^\dagger$ が作用したときエネルギーの値が $\hbar\omega$ だけ増加することがわかる．よって，a は**下降演算子**，$a^\dagger$ は**上昇演算子**とみなされる．

H の固有値 E_n，固有関数 $u_n(x)$ はそれぞれ

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)\quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{3.42}$$

$$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n u_0(x),\quad u_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \tag{3.43}$$

である．ここで，$u_0(x)$ は基底状態を表す固有関数で $au_0(x)=0$ を満たす．$u_n(x)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_m^*(x)u_n(x)dx=\delta_{mn},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x)\phi_n^*(y)=\delta(x-y) \tag{3.44}$$

を満たし，a，$a^\dagger$ が作用すると，

$$au_n(x)=\sqrt{n}u_{n-1}(x)\quad (n=1,2,\cdots), \tag{3.45}$$

$$a^\dagger u_n(x)=\sqrt{n+1}u_{n+1}(x)\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.46}$$

となる．(3.42) からわかるように，エネルギーと振動数の関係はエネルギー量子仮説のものと $\frac{h\nu}{2}$ を除いて同じである．ここで，$\frac{h\nu}{2}$ は**零点エネルギー** (zero-point energy) とよばれる．

ハイゼンベルク表示において，$x(t)$ および $p(t)$ は

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[x(t),H]=\frac{p(t)}{m},\quad \frac{dp(t)}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[p(t),H]=-m\omega^2x(t) \tag{3.47}$$

に従って時間発展する．ここで，$H=\frac{p^2(t)}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2(t)$，$[x(t),p(t)]=i\hbar$

を用いた．(3.47) の 2 式を連立させることにより，$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ （単振動の方程式）が導かれる．ちなみに，$a(t)$，$a^\dagger(t)$ を用いて，

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger(t)a(t) + \frac{1}{2}\right) \tag{3.48}$$

と表される．H は保存量で (3.36) と一致する．交換関係

$$[a(t), a^\dagger(t)] = 1, \quad [a(t), a(t)] = 0, \quad [a^\dagger(t), a^\dagger(t)] = 0 \tag{3.49}$$

のもとで，$a(t)$，$a^\dagger(t)$ は

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a(t), H] = -i\omega a(t), \quad \frac{da^\dagger(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a^\dagger(t), H] = i\omega a^\dagger(t), \tag{3.50}$$

すなわち，$\dfrac{d^2a(t)}{dt^2} = -\omega^2 a(t)$，$\dfrac{d^2a^\dagger(t)}{dt^2} = -\omega^2 a^\dagger(t)$ に従って時間発展する．

3.1.4.1 単振動を記述する異なる解

(3.50) に従って時間発展する $a(t)$, $a^\dagger(t)$ は, H が (3.48) で量子条件が (3.49) で与えられたものだけではなく，別の解も存在する．解を区別するため，力学変数を $a(t)$，$a^\dagger(t)$ から $c(t)$，$c^\dagger(t)$ に変える．具体的には，$c(t)$，$c^\dagger(t)$ を用いて，H は

$$H = \hbar\omega\left(c^\dagger(t)c(t) - \frac{1}{2}\right) \tag{3.51}$$

と表され，

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[c(t), H], \quad \frac{dc^\dagger(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[c^\dagger(t), H] \tag{3.52}$$

に従って時間発展し，反交換関係

$$\{c(t), c^\dagger(t)\} = 1, \quad \{c(t), c(t)\} = 0, \quad \{c^\dagger(t), c^\dagger(t)\} = 0 \tag{3.53}$$

および公式

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \tag{3.54}$$

を用いて，$c(t)$，$c^\dagger(t)$ が $\dfrac{d^2c(t)}{dt^2} = -\omega^2 c(t)$，$\dfrac{d^2c^\dagger(t)}{dt^2} = -\omega^2 c^\dagger(t)$ に従うことが示される．ここで，$\{c(t), c^\dagger(t)\}$ は**反交換子**とよばれる演算子の間の非反可換性を表す量で，

$$\{A, B\} = AB + BA \tag{3.55}$$

で定義される．(3.53) より，$c(t)^2 = 0$，$c^\dagger(t)^2 = 0$ であることに注意しよう．$N \equiv c^\dagger(t)c(t)$ に対して，

$$[N, c(t)] = -c(t), \quad [N, c^\dagger(t)] = c^\dagger(t) \tag{3.56}$$

が成り立つので，$c(t)$ は下降演算子，$c^\dagger(t)$ は上昇演算子とみなされる．また，N の固有値は 0 と 1 であることが，

$$\begin{aligned} N(N-1) &= NN - N = c^\dagger(t)c(t)c^\dagger(t)c(t) - c^\dagger(t)c(t) \\ &= c^\dagger(t)\left(1 - c^\dagger(t)c(t)\right)c(t) - c^\dagger(t)c(t) \\ &= c^\dagger(t)c(t) - c^\dagger(t)c(t) = 0 \end{aligned} \tag{3.57}$$

からわかる．$c(t)|0\rangle = 0$ で基底状態 $|0\rangle$ を定義すると，固有値 0，1 に関する固有状態はそれぞれ

$$|0\rangle, \quad |1\rangle = c^\dagger(t)|0\rangle \tag{3.58}$$

である．$c^\dagger(t)^2|0\rangle = 0$ が成立するため，N の固有状態は $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の 2 つの状態しか許されない．参考までに，

$$c(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\xi(t) + \frac{i\eta(t)}{m\omega}\right), \quad c^\dagger(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\xi(t) - \frac{i\eta(t)}{m\omega}\right) \tag{3.59}$$

で関係付けられるエルミート演算子 $\xi(t)$，$\eta(t)$ を用いて，H は

$$H = i\omega\xi(t)\eta(t) \tag{3.60}$$

と表される．さらに，$\xi(t)$，$\eta(t)$ は反交換関係

$$\{\xi(t), \eta(t)\} = 0, \quad \{\xi(t), \xi(t)\} = \frac{\hbar}{m\omega}, \quad \{\eta(t), \eta(t)\} = m\hbar\omega \tag{3.61}$$

に従い，単振動の方程式のもとで時間発展する．

3.1.5 経路積分

電子波 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ が次のような原理を満たすとする．

> **ホイヘンスの原理**（Huygens' principle）：波面の各点から波の進む向きに**素元波**とよばれる 2 次的な波が発生し，それらの素元波がつくる包絡面（ほうらくめん）が次の瞬間の波面となる（図 3.1 参照）．

ホイヘンスの原理を式で表すと，

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \int K(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)\psi(\boldsymbol{x}_0, t_0)d^3x_0 \tag{3.62}$$

となる．ここで，$K(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ はファインマン核とよばれ，$\Delta t = t - t_0$ が微小であるとき，

$$K(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{\Delta t}\right)^2 - V(\boldsymbol{x})\right\}\Delta t\right] \tag{3.63}$$

と表される．(3.62) で与えられた $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ がシュレーディンガー方程式 (3.10) を満たすことを以下で証明する．

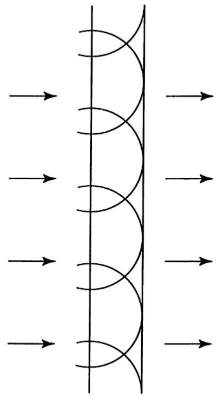


図 3.1　ホイヘンスの原理.

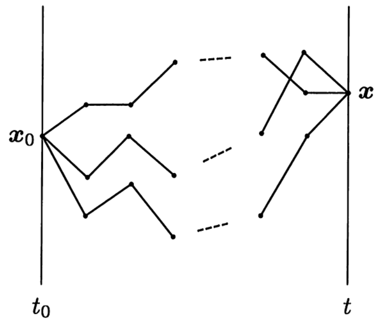


図 3.2　様々な経路.

（証明）まずは $\psi(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ を $\boldsymbol{x}$ のまわりで,

$$\psi(\boldsymbol{x}_0, t_0) = \psi(\boldsymbol{x}, t_0) + (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x})^2\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \cdots \tag{3.64}$$

のようにテイラー展開する．(3.63), (3.64) を (3.62) に代入し，積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax^2}dx = \sqrt{\frac{i\pi}{a}},\quad \int_{-\infty}^{\infty} xe^{iax^2}dx = 0,\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{iax^2}dx = \frac{i}{2a}\sqrt{\frac{i\pi}{a}} \tag{3.65}$$

を用いて，(3.62) の右辺は

$$\text{右辺} = \psi(\boldsymbol{x}, t_0) - \frac{i\Delta t}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi + V(\boldsymbol{x})\psi\right) + O((\Delta t)^2) \tag{3.66}$$

となる．よって，

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \psi(\boldsymbol{x}, t_0) - \frac{i\Delta t}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(\boldsymbol{x}, t) + O((\Delta t)^2) \tag{3.67}$$

が得られ，$\Delta t \to 0$ の極限を取ることにより (3.10) が導かれる．■

$t - t_0$ が有限時間の場合，時間間隔を N 等分し，(3.62) を繰り返し用いて，

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}, t) &= \int K(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}_{N-1}, t_{N-1})K(\boldsymbol{x}_{N-1}, t_{N-1}; \boldsymbol{x}_{N-2}, t_{N-2}) \\ &\qquad \cdots K(\boldsymbol{x}_1, t_1; \boldsymbol{x}_0, t_0)\psi(\boldsymbol{x}_0, t_0)d^3x_{N-1}d^3x_{N-2}\cdots d^3x_0 \\ &= \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{k=0}^{N-1}d^3x_k \\ &\quad\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k}{\Delta t}\right)^2 - V(\boldsymbol{x}_{k+1})\right\}\Delta t\right]\psi(\boldsymbol{x}_0, t_0)\end{aligned} \tag{3.68}$$

が得られる．ここで，$\Delta t = \dfrac{t - t_0}{N}$ である．(3.68) からわかるように，$(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ から $(\boldsymbol{x}, t)$ に至るあらゆる経路に関する足し上げが必要となる（図 3.2 参照）．(3.68) は**経路積分**（path integral）とよばれ，$N \to \infty$ において，

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\int \mathscr{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)\psi(\boldsymbol{x}_0,t_0) \tag{3.69}$$

と記される．ここで，$\mathscr{D}x$，S はそれぞれ

$$\mathscr{D}x \equiv \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N}{2}}\prod_{k=1}^{N-1} d^3x_k, \tag{3.70}$$

$$S=\int_{t_0}^{t} L dt' = \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt'}\right)^2 - V(\boldsymbol{x})\right\}dt' \tag{3.71}$$

である．(3.69) において，**指数関数の肩の上に作用積分** $S=\int_{t_0}^{t} Ldt'$ **が乗っているため，S の変化が $\hbar$ に比べて十分に大きい場合（$|\Delta S| \gg \hbar$），激しく振動して相殺するため積分の値に効かない．すなわち，作用積分が停留点を取るところ（S の変分が 0 のところ）である古典的な軌道からの寄与が支配的となる．このような特徴が古典論における「変分原理はなぜ有効なのか？」という問いかけに対する回答である．**

場の理論に関しては，時空点 x_{i} で場が φ_{i} の状態から時空点 x で場が φ の状態に遷移するとき，$\int \mathscr{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$ の対応物は

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{1}{c}\int_{x_{\mathrm{i}}}^{x}\mathscr{L}d^4x'\right) \tag{3.72}$$

である．ここで，$\mathscr{L}$ はラグランジアン密度，$d^4x' = cdt'dx'dy'dz'$ である．

3.1.6　量子力学の課題

現時点で次のような課題が残る．

(1) 特殊相対性理論と整合する量子力学を構築する．
(2) 粒子の生成・消滅を記述する多粒子を含む理論を構築する．
(3) 光子に関する量子論を構築する．

(1)，(2)，(3) については，それぞれ 3.2 節，3.3 節，4.2 節で扱う．

3.2　相対論的量子力学

シュレーディンガー方程式を基礎方程式とする量子力学は，ローレンツ変換のもとでの共変性をもたないため特殊相対性原理を満足しない．この章では，**相対論的量子力学**（relativistic quantum mechanics）とよばれる特殊相対論的な量子力学を扱う．

3.2.1　要請

自由な相対論的な電子の方程式を導くために次のような要請を課す．

【要請 1】 特殊相対性原理に従う．
【要請 2】 自由粒子は 4 元運動量の関係式 ($E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$) に従う．
【要請 3】 非負である確率密度を与える．

要請 3 より確率密度を $\rho = |\psi(x)|^2$ として確率の保存則を表す連続の方程式 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$ の成立を要請すると，$\psi(x)$ が満たす方程式は時間に関する 1 階の微分方程式がふさわしいことがわかる．なぜなら，連続の方程式の成立を示すために波動方程式が用いられ，波動方程式が $i\hbar\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ および ψ の複素共役 ψ^* （ψ が多成分からなる場合はさらに転置を取るためエルミート共役 $\psi^\dagger$）に関する方程式 $-i\hbar\dfrac{\partial \psi^*}{\partial t} = (H\psi)^*$ の場合，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left\{-(H\psi)^*\psi + \psi^* H\psi\right\} \tag{3.73}$$

となり，この右辺が $-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}$ となることが期待されるからである．ローレンツ変換が時空座標に関する線形変換なので，波動方程式は空間座標についても 1 階の微分方程式になると予想される．このような推論のもとで，

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + i\beta\frac{m_{\mathrm{e}}c}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \tag{3.74}$$

という形をした方程式を出発点に取る．ここで，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ および β は x^μ に依存しないとする．(3.74) が要請 1 を満たすかどうかについては，3.2.3 項で考察する．

(3.74) に $i\hbar c$ を掛けると，$\left(i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} - c\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar\boldsymbol{\nabla}) - \beta m_{\mathrm{e}}c^2\right)\psi(x) = 0$ となり，波動関数が $e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et)}$ に比例するとき (3.74) の解は

$$E - c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} - \beta m_{\mathrm{e}}c^2 = 0 \tag{3.75}$$

を満たすことがわかる．

3.2.2 ディラック方程式

(3.75) を満たす E と $\boldsymbol{p}$ が要請 2 の 4 元運動量の関係式を満たすためには，

$$E^2 = \left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m_{\mathrm{e}}c^2\right)^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m_{\mathrm{e}}^2c^4 \tag{3.76}$$

が成り立てばよい．ここで，$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\alpha^i p^i$，$\boldsymbol{p}^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}(p^i)^2$ で，(3.76) が成り立つためには，α^i $(i = 1, 2, 3)$ および β が

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}, \quad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0, \quad \beta^2 = 1 \tag{3.77}$$

を同時に満たす必要がある．(3.77) を満たす α^i および β は単なる数ではなく，多成分を有する波動関数に作用する行列と考えられる．このとき，(3.77) の 0 は成分がすべて 0 である行列，1 は単位行列を意味する．さらに，エネルギー

E は実数であるから，α^i および β はエルミート行列である．

電子の場合，$m_e \neq 0$ なので，(3.77) を満たす最小のエルミート行列は 4×4 行列で，例として，

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

を挙げることができる．ここで，σ^i は

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

で**パウリ行列**とよばれる*1)．また，I は 2×2 単位行列である．(3.78) は**ディラック表示**（あるいは**標準表示**）とよばれる表示で，非相対論的な極限を考察する際に便利である．

(3.74) に $i\hbar c$ を掛けて，第 2 項と第 3 項を右辺に移行することにより，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m_e c^2\right)\psi(x) \tag{3.80}$$

が得られる．(3.80) は**ディラック方程式**（Dirac equation）とよばれる（この場合は自由な電子に関する）相対論的な波動方程式である．ディラック表示でディラック方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \begin{pmatrix} m_e c^2 & -i\hbar c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -i\hbar c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla} & -m_e c^2 \end{pmatrix}\psi(x) \tag{3.81}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ である．

要請 3 が満たされることを以下で示す．(3.80) に左から $\psi^\dagger$ を掛けたものから，(3.80) のエルミート共役な方程式 $-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger = \left(i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\psi^\dagger\right)\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta m_e c^2\psi^\dagger$ に右から ψ を掛けたものを引くことにより，

$$i\hbar\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi = -i\hbar c\left\{\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \left(\boldsymbol{\nabla}\psi^\dagger\right)\cdot\boldsymbol{\alpha}\psi\right\} \tag{3.82}$$

が導かれ，右辺を左辺に移行して変形することにより，連続の方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) + i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi\right) = 0 \tag{3.83}$$

が導かれる．(3.83) より，確率密度 ρ，確率の流れ $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ

$$\rho = \psi^\dagger\psi = |\psi|^2, \quad \boldsymbol{j} = c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi \tag{3.84}$$

で与えられ，ρ は非負の値を取るので確率解釈が可能となる．

ディラック方程式は 1928 年にディラックにより導かれた方程式で，スピン

*1) 質量 0 の粒子に関しては β を必要としないので，パウリ行列を用いたワイル方程式（Weyl equation）とよばれる方程式が許される．ワイル方程式に関しては 6.2.1 項を参照しよう．

の自由度が自動的に含まれていて，電子以外の質量をもつスピン 1/2 の粒子（陽子，中性子など）にも適用される．ディラック方程式に従う粒子は一般に**ディラック粒子**とよばれる．ここで，**スピン**（spin）とは粒子に固有の角運動量で軌道角運動量 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ とは異なり，粒子が静止している場合でも 0 ではない値をもつ．スピン 1/2 の粒子に関するスピン演算子 S^i（$i = 1, 2, 3$）はパウリ行列 (3.79) を用いて，

$$S^i \equiv \hbar \frac{\sigma^i}{2} \tag{3.85}$$

と定義され，角運動量の交換関係

$$[l^i, l^j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} l^k \tag{3.86}$$

を満たす．ここで，ε^{ijk} は 3 つの添字に関して完全反対称で $\varepsilon^{123} = 1$ である．

ディラック粒子の波動関数は 4 成分をもち，正エネルギーを有する 2 つのスピン状態と負エネルギーを有する 2 つのスピン状態からなる．負エネルギー解の存在は静止した電子に関するディラック方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \beta m_{\mathrm{e}} c^2 \psi(x), \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{3.87}$$

において，ψ の下の 2 成分がエネルギー $E = -m_{\mathrm{e}}c^2 (< 0)$ の固有状態であることからわかる．また，負エネルギー解の存在により，「電子がより低いエネルギー状態に遷移することにより，原子の安定性が脅かされる」という問題が発生する．この問題に対して，ディラックは「負エネルギー状態がすべて埋っている状態が真空である」という定義に基づいて，**空孔**（くうこう）**理論**を展開した．この理論を通して，負エネルギー状態の電子が欠けた孔（あな）が陽電子（電子の反粒子）であると予言され，その存在が実験で確認されたが，現在では空孔理論は場の量子論が確立するまでの過渡的な理論とみなされる．場の量子論の枠内で負エネルギー解の問題がどのように解消されるかについては，3.3.2 項で述べる．

3.2.3　相対論的共変性

(3.74) に $i\hbar\beta$ を掛け，$\gamma^0 \equiv \beta$ と $\gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ ($i = 1, 2, 3$) をまとめて γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と記すと，ディラック方程式は

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_{\mathrm{e}} c \right) \psi(x) = 0 \tag{3.88}$$

と表される．ここで，$x^\mu = (ct, x, y, z)$，波動関数 $\psi(x)$ の引数（ひきすう） x は以前と同様に x^μ を表す．また，γ^μ は γ **行列**とよばれる**クリフォード代数**（Clifford algebra）の元で 4×4 行列で表され，反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I \tag{3.89}$$

を満たす．ここで，$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$，$I$ は 4×4 単位行列である．以後，紛らわしい場合を除いて単位行列を表す I を省略する場合がある．

ディラック表示（(3.78) 参照）において，γ^0 および γ^i は

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.90}$$

と表される．

要請 1 について考察する．時空の一様性より並進 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ （a^μ：任意の定ベクトル）のもとで ψ が変化しない（$\psi'(x+a) = \psi(x)$）とすると，$\dfrac{\partial}{\partial x'^\mu} = \dfrac{\partial}{\partial(x^\mu + a^\mu)} = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ より並進のもとでディラック方程式は不変に保たれる．以下では，ディラック方程式が本義ローレンツ変換（ローレンツブースト，空間回転）のもとで共変性を有することを示す．

相対性原理より，本義ローレンツ変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ （$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$，$\Lambda^0{}_0 \geq 1$，$\det\Lambda = 1$）で結ばれる 2 つの慣性系 I，I′（その座標系をそれぞれ $\{x^\mu\}$，$\{x'^\mu\}$ とする）において同じ形の方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_{\mathrm{e}}c\right)\psi(x) = 0, \tag{3.91}$$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m_{\mathrm{e}}c\right)\psi'(x') = 0 \tag{3.92}$$

が成り立つはずである．$\psi(x)$ は本義ローレンツ変換のもとで，

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{3.93}$$

のように線形に変換すると仮定しよう．ここで，$S(\Lambda)$ は 4 成分をもつ $\psi(x)$ に作用する 4×4 行列で $\Lambda^\mu{}_\nu$ に依存する．簡単のため，$\Lambda^\mu{}_\nu$ を Λ と記した．

本義ローレンツ変換は群を成し逆変換が存在する．$S(\Lambda)$ の逆変換は $S(\Lambda)$ の逆行列 $S^{-1}(\Lambda)$ を用いて表され，

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x) \tag{3.94}$$

が成り立つ．また，$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ の逆変換 $x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu$ を用いて，

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = S(\Lambda^{-1})\psi'(\Lambda x) \tag{3.95}$$

が成り立つ．(3.94)，(3.95) より，$S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1})$ が成り立つ．

ディラック方程式の本義ローレンツ変換のもとでの共変性を示すためには，$S(\Lambda)$ の具体形を求めて，その存在を示せばよい．$S(\Lambda)$ を求めるために，まずはそれが満たすべき条件式を導こう．(3.91) に対して，左から $S(\Lambda)$ を施すことにより，

$$\left[i\hbar S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m_{\mathrm{e}}c\right]\psi'(x') = 0 \tag{3.96}$$

が導かれる．ここで，$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$，$S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda) = I$ および

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \tag{3.97}$$

を用いた．(3.96) が (3.92) と一致するためには，

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu,\ \text{すなわち，}\ \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) \tag{3.98}$$

が成り立てばよい．(3.98) が $S(\Lambda)$ が満たすべき条件式である．

無限小本義ローレンツ変換の変換行列は

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu \tag{3.99}$$

で与えられる．ここで，$\Delta\omega^\nu{}_\mu$ は無限小パラメータで，

$$\Delta\omega_{\nu\mu} = \eta_{\nu\lambda}\Delta\omega^\lambda{}_\mu = -\Delta\omega_{\mu\nu} \tag{3.100}$$

を満たす．実際，(3.100) を用い $\Delta\omega_{\mu\nu}$ の 2 次以上の項を無視して，

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta &= \eta_{\mu\nu}\left(\delta^\mu{}_\alpha + \Delta\omega^\mu{}_\alpha\right)\left(\delta^\nu{}_\beta + \Delta\omega^\nu{}_\beta\right) \\ &= \eta_{\alpha\beta} + \Delta\omega_{\alpha\beta} + \Delta\omega_{\beta\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{3.101}$$

が導かれる．無限小変換を繰り返し行うことにより，x^μ に対して，

$$\begin{aligned}x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \\ \Lambda^\mu{}_\nu &= \lim_{N\to\infty}\left(\delta^\mu{}_{\mu_1} + \Delta\omega^\mu{}_{\mu_1}\right)\left(\delta^{\mu_1}{}_{\mu_2} + \Delta\omega^{\mu_1}{}_{\mu_2}\right)\cdots\left(\delta^{\mu_{N-1}}{}_\nu + \Delta\omega^{\mu_{N-1}}{}_\nu\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[\left(I + \frac{\omega}{N}\right)^N\right]^\mu{}_\nu = \left(e^\omega\right)^\mu{}_\nu = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\omega^n}{n!}\right)^\mu{}_\nu\end{aligned} \tag{3.102}$$

が導かれる．ここで $\omega^\mu{}_\nu = N\Delta\omega^\mu{}_\nu$ である．(3.102) において，**ネイピア数** (Napier's constant)（$e = 2.71828\cdots$）に関する公式

$$e = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N,\quad e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N,\quad e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} \tag{3.103}$$

の行列版を用いている．

(3.98) を満足する $S(\Lambda)$ は以下の公式で与えられる（証明は下記参照）．

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= S(\Lambda)\psi(x), \\ S(\Lambda) &= \lim_{N\to\infty}\left(I - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(I - \frac{i}{4}\frac{\omega_{\mu\nu}}{N}\sigma^{\mu\nu}\right)^N \\ &= \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)^n.\end{aligned} \tag{3.104}$$

ここで $\sigma^{\mu\nu} = \dfrac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ である．本義ローレンツ変換のもとで，$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ のように変換する量は**ディラックスピノル**とよばれる．

（証明）(3.104) で与えられた $S(\Lambda)$ が (3.98) を満たすことを無限小本義ローレンツ変換について確かめよう．無限小本義ローレンツ変換のもとで $S(\Lambda)$ は

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\ ,\quad S^{-1}(\Lambda) = I + \frac{i}{4}\Delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = S(\Lambda^{-1}) \tag{3.105}$$

で，(3.99) と (3.105) を (3.98) の第 1 式の左辺に代入することにより，

$$\begin{aligned}&\left(I - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\right)\gamma^{\mu}\left(I + \frac{i}{4}\Delta\omega_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}\right)\left(\delta^{\nu}{}_{\mu} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}\right)\\&= \gamma^{\nu} - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\alpha\beta}\left[\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^{\nu}\right] + \gamma^{\mu}\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu} = \gamma^{\nu}\end{aligned} \tag{3.106}$$

が導かれ，(3.98) の第 1 式が成立することがわかる．ここで，$\Delta\omega_{\alpha\beta}$ の 2 次以上の項は無視した．また，(3.106) における最後の変形において，

$$\begin{aligned}\frac{i}{4}\Delta\omega_{\alpha\beta}\left[\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^{\nu}\right] &= -\frac{1}{4}\Delta\omega_{\alpha\beta}\left[\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}, \gamma^{\nu}\right] = -\frac{1}{4}\Delta\omega_{\alpha\beta}\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right)\\&= -\frac{1}{4}\Delta\omega_{\alpha\beta}\left\{\gamma^{\alpha}\left(-\gamma^{\nu}\gamma^{\beta} + 2\eta^{\nu\beta}\right) - \left(-\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu} + 2\eta^{\nu\alpha}\right)\gamma^{\beta}\right\}\\&= \frac{1}{2}\gamma^{\alpha}\Delta\omega_{\beta\alpha}\eta^{\nu\beta} + \frac{1}{2}\gamma^{\beta}\Delta\omega_{\alpha\beta}\eta^{\nu\alpha} = \gamma^{\mu}\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}\end{aligned} \tag{3.107}$$

を用いた．(3.107) における 1 番目から 2 番目の式変形において，

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}\right] = \frac{i}{2}\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\right) = i\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - \eta^{\alpha\beta}\right), \tag{3.108}$$

および $\left[\eta^{\alpha\beta}, \gamma^{\nu}\right] = 0$ を，1 行目から 2 行目に移るところでクリフォード代数の反交換関係 (3.89) を用いた．■

3.3 場の量子論

3.1.3 項で学んだように，解析力学のハミルトン形式に基づいて，正準量子化を用いて，量子力学に移ることができる．量子力学では粒子の位置 $\boldsymbol{x}$ や運動量 $\boldsymbol{p}$ などの物理量が演算子の役割を果たす．場の解析力学に対して，同様の手続きを行うことにより，場を演算子とする理論形式に移ることができると予想される．このような量子化された場を扱う理論は**場の量子論**（quantum field theory）とよばれ，粒子の生成・消滅を含む多粒子系を自然に記述することができるため，素粒子の法則を記述する有用な枠組となる．以下では，非相対論的な粒子の場に関する考察に基づいて，場の量子論の枠組を紹介する．次にディラック粒子である電子を例に取って，相対論的場の量子論を展開する．

3.3.1 非相対論的場の量子論

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{x})\right)\Psi(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.109}$$

に従う場 $\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ を力学変数として量子化する．$\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ は複素数に値をもつ場（複素場）とする．変分原理を用いて，(3.109) を導く作用積分は

$$S = \frac{1}{c}\int \mathscr{L} d^4x,$$
$$\mathscr{L} = i\hbar\Psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{x},t) - \Psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)H\Psi(\boldsymbol{x},t) \tag{3.110}$$

で与えられる．ここで，$H = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{x})$ である．(3.110) の $\mathscr{L}$ はエルミートではないことに注意しよう．なお参考までに，上の $\mathscr{L}$ に全微分の項 $-\dfrac{i}{2}\hbar\dfrac{\partial(\Psi^\dagger\Psi)}{\partial t}$ を加えることにより，エルミートな形のもの

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^\dagger = \frac{i}{2}\hbar\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{i}{2}\hbar\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi - \Psi^\dagger H\Psi \tag{3.111}$$

に変えることができる．(3.110)，(3.111) のどちらのラグランジアン密度を用いても，同一の波動方程式 (3.109) が導かれ，物理的に等価であることが知られているため，本書では (3.110) の $\mathscr{L}$ を用いることにする．

場の解析力学に基づき，$\Psi(\boldsymbol{x},t)$ に関する正準共役な場 $\Pi(\boldsymbol{x},t)$ は，

$$\Pi(\boldsymbol{x},t) \equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}(\boldsymbol{x},t)} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Psi}(\boldsymbol{x},t)} = i\hbar\Psi^\dagger(\boldsymbol{x},t) \tag{3.112}$$

で定義される．ここで，$L = \displaystyle\int \mathscr{L} d^3x$，$\dot{\Psi}(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{\partial\Psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$ である．

量子力学の正準量子化における量子条件 (3.33) を参考にして，

$$[\Psi(\boldsymbol{x},t), \Pi(\boldsymbol{y},t)] = i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad [\Psi(\boldsymbol{x},t), \Psi(\boldsymbol{y},t)] = 0,$$
$$[\Pi(\boldsymbol{x},t), \Pi(\boldsymbol{y},t)] = 0 \tag{3.113}$$

を課す（これらの条件は電子には適用できないことをあらかじめ述べておく）．

場の役割を理解するために (3.109) の一般解

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_l A_l(t)\phi_l(\boldsymbol{x}) \tag{3.114}$$

を考察しよう．ここで，$\phi_l(\boldsymbol{x})$ は H の固有関数，すなわち，固有値方程式

$$H\phi_l(\boldsymbol{x}) = E_l\phi_l(\boldsymbol{x}) \tag{3.115}$$

の解で正規直交完全系を成す．このとき，

$$\int \phi_l^*(\boldsymbol{x})\phi_{l'}(\boldsymbol{x})d^3x = \delta_{ll'}, \quad \sum_l \phi_l(\boldsymbol{x})\phi_l^*(\boldsymbol{y}) = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3.116}$$

が成り立つ．l は状態を表す添字で（簡単のため E_l が離散的な正の値を取るとして），離散的とした．l が連続的な値を取る場合は $\delta_{ll'}$ がディラックの δ 関数に，和が積分に代わる．(3.112)，(3.114) より，

$$\Pi(\boldsymbol{x},t) = \sum_l i\hbar A_l^\dagger(t)\phi_l^*(\boldsymbol{x}) \tag{3.117}$$

である．展開係数 $A_l(t)$，$A_l^\dagger(t)$ はそれぞれ

$$i\hbar\frac{dA_l(t)}{dt} = E_l A_l(t), \quad i\hbar\frac{dA_l^\dagger(t)}{dt} = -E_l A_l^\dagger(t) \tag{3.118}$$

に従う演算子と考えられ，(3.113) は

$$\left[A_l(t), A_{l'}^\dagger(t)\right] = \delta_{ll'}, \quad [A_l(t), A_{l'}(t)] = 0, \quad \left[A_l^\dagger(t), A_{l'}^\dagger(t)\right] = 0 \tag{3.119}$$

に置き換わる．さらに，エネルギー演算子 $H_{場}$ は $A_l(t) = A_l e^{-\frac{i}{\hbar}E_l t}$, $A_l^\dagger(t) = A_l^\dagger e^{\frac{i}{\hbar}E_l t}$ を用いて，

$$H_{場} = \int \Psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t) H \Psi(\boldsymbol{x}, t) d^3x = \sum_l E_l A_l^\dagger(t) A_l(t) = \sum_l E_l A_l^\dagger A_l \tag{3.120}$$

と表される．ここで，A_l, $A_l^\dagger$ はシュレーディンガー表示における演算子である．(3.119)，(3.120) と調和振動子に関する表式 $[a, a^\dagger] = 1$，$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$ (3.1.4 項参照) を比較することにより，$\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ **が記述する系は状態** l **でラベル付けされた無限個の調和振動子の集団と等価であることがわかる．**

調和振動子の場合，a はエネルギーの値を $\hbar\omega$ だけ減少させる下降演算子，$a^\dagger$ はエネルギーの値を $\hbar\omega$ だけ増加させる上昇演算子であった ((3.40)，(3.41) 参照)．このような性質から，$H_{場} = \sum_l E_l A_l^\dagger A_l$ **で記述される系において，**A_l **はエネルギーの値が** E_l **である粒子を消滅させる演算子（消滅演算子），**$A_l^\dagger$ **はエネルギーの値が** E_l **である粒子を生成させる演算子（生成演算子）と解釈される．**

ちなみに，粒子の個数を数える演算子は**個数演算子**とよばれ，

$$N_{場} \equiv \int \Psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t) \Psi(\boldsymbol{x}, t) d^3x = \sum_l A_l^\dagger(t) A_l(t) = \sum_l A_l^\dagger A_l \tag{3.121}$$

で定義される．$\Psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t)\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ は個数密度である．さらに，調和振動子の固有値 $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ と固有状態 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ （固有関数 $u_n(x)$ をケットベクトル $|n\rangle$ に換えたもの）を参考にして，$H_{場} = \sum_l E_l A_l^\dagger A_l$ に関する固有値方程式

$$H_{場}|n_1, n_2, \cdots\rangle = E|n_1, n_2, \cdots\rangle \tag{3.122}$$

の解として，

$$E = \sum_l E_l n_l, \quad |n_1, n_2, \cdots\rangle = \prod_l \frac{1}{\sqrt{n_l!}}(A_l^\dagger)^{n_l}|0\rangle \tag{3.123}$$

が得られる．ここで，n_l は $N_l \equiv A_l^\dagger A_l$ の固有値で 0 または自然数 ($n_l = 0, 1, 2, \cdots$) である．調和振動子の場合，$a^\dagger a$ の固有値が 0 または自然数であることを思い出そう．また，$|n_1, n_2, \cdots\rangle$ はエネルギーの値が E_1 である粒子が n_1 個，E_2 である粒子が n_2 個，$\cdots$，存在する状態を表す．$|0\rangle$ は

粒子が 1 個も存在していない状態（正確には $|0,0,\cdots\rangle$ で，系のエネルギーがこの状態で最小であるとき真空状態である）を表し，

$$A_l|0\rangle = 0 \tag{3.124}$$

が成り立つ．**場の演算子 $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ に基づく理論では，粒子数は個数演算子の固有値として現れるため粒子の生成や消滅過程を含む物理系に適用できる．**

ハイゼンベルク表示において，$\Psi(\boldsymbol{x},t)$ や $\Pi(\boldsymbol{x},t)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\Psi(\boldsymbol{x},t), H_{場}\right],\ \frac{\partial}{\partial t}\Pi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\Pi(\boldsymbol{x},t), H_{場}\right] \tag{3.125}$$

に従う．(3.125) は (3.109) およびそのエルミート共役な式と等価である．

一方，シュレーディンガー表示において，物理状態 $|\Phi(t)\rangle$ は

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle = H_{場}|\Phi(t)\rangle \tag{3.126}$$

に基づいて時間発展する．位置表示において，$|\Phi(t)\rangle$ は

$$\begin{aligned}|\Phi(t)\rangle\ =\ &\sum_{N=0}^{\infty}\int d^3x_1d^3x_2\cdots d^3x_N \\ &\times\psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N;t)|\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N\rangle\end{aligned} \tag{3.127}$$

のように展開される．ここで，$|\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N\rangle$ は位置表示のケットベクトルで，$\Psi^\dagger(\boldsymbol{x}_k)$（$k=1,2,\cdots,N$）を用いて，

$$|\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}}\Psi^\dagger(\boldsymbol{x}_1)\Psi^\dagger(\boldsymbol{x}_2)\cdots\Psi^\dagger(\boldsymbol{x}_N)|0\rangle \tag{3.128}$$

のように定義される．$|\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N\rangle$ は規格化および直交条件

$$\begin{aligned}&\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N|\boldsymbol{x}'_1,\boldsymbol{x}'_2,\cdots,\boldsymbol{x}'_M\rangle \\ &\quad= \frac{\delta_{NM}}{N!}\sum_{(P)}\delta^3(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}'_1)\delta^3(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}'_2)\cdots\delta^3(\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{x}'_N)\end{aligned} \tag{3.129}$$

に従う．ここで，$\sum_{(P)}$ は粒子の入れ替えに関するあらゆる可能な和を表す．

(3.127) を (3.126) に代入し，(3.113) を用いて，$\psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N;t)$ が

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N;t) = H_N\psi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N;t) \tag{3.130}$$

に従うことがわかる．ここで，H_N は N 粒子系の量子力学における全エネルギー演算子で，

$$H_N = \sum_{k=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_k^2 + V(\boldsymbol{x}_k)\right) \tag{3.131}$$

と表される．(3.130)，(3.131) より，互いに相互作用しない N 個の同種粒子を含む系において，$\psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N;t)$ は N 粒子を記述する波動関数で，

$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N)$ で張られる $3N$ 次元の空間 $\boldsymbol{R}^{3N}$ 上の波と考えられる．また，波動関数が規格化されている場合，確率解釈に基づき $|\psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N; t)|^2$ は時刻 t で粒子がそれぞれ位置 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_N$ で観測される確率密度を表す．ちなみに，(3.130) の解は

$$\psi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N; t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{(P)} \phi_{l_1}(\boldsymbol{x}_1) \cdots \phi_{l_N}(\boldsymbol{x}_N), \tag{3.132}$$

$$E = E_{l_1} + \cdots + E_{l_N} \tag{3.133}$$

で与えられる．波動関数は任意の同種粒子の入れ替えに対して対称で，このような性質をもつ粒子は**ボソン（ボース粒子）**（boson）とよばれる．一方，電子の波動関数は任意の電子の入れ替えに対して反対称であることが知られている．電子のような性質をもつ粒子は**フェルミオン（フェルミ粒子）**（fermion）とよばれる．フェルミオンについての場の量子論に関しては次目で考察する．

(3.127)，(3.128)，(3.129) を用いて，$\psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N; t)$ に関する公式

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N; t) &= N! \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N | \Phi(t) \rangle \\ &= \sqrt{N!} \langle 0 | \Psi(\boldsymbol{x}_1) \Psi(\boldsymbol{x}_2) \cdots \Psi(\boldsymbol{x}_N) | \Phi(t) \rangle \end{aligned} \tag{3.134}$$

が得られる．これより，量子力学の波動関数は場の量子論においては行列要素と考えられ，1 粒子の波動関数は $\psi(\boldsymbol{x}, t) = \langle \boldsymbol{x} | \Phi(t) \rangle = \langle 0 | \Psi(\boldsymbol{x}) | \Phi(t) \rangle$ で与えられる．ハイゼンベルク表示に移ると，

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \langle 0 | \Psi(\boldsymbol{x}, t) | \Phi \rangle \tag{3.135}$$

となり，**場の量子論の一般的性質として，場の演算子 $\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ が量子力学の波動関数 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ と同じ形の方程式に従う**ことが容易にわかる．

このように互いに相互作用しない粒子を記述する場の方程式を解いて，解を正規直交系のもとで展開すると，展開係数が生成演算子，あるいは消滅演算子となる．また，$|0\rangle$ の状態に生成演算子を作用させることにより任意の多粒子状態を生成することができる．このように粒子数に着目した状態ベクトル $|n_1, n_2, \cdots\rangle$ により張られる線形空間は**フォック空間**（Fock space）とよばれる．

自己相互作用および他の粒子との相互作用は，場の演算子に関する 3 次以上の項としてラグランジアン密度やハミルトニアン密度に導入される．相互作用を記述するハミルトニアン密度を空間積分した量が相互作用ハミルトニアンであり，力の起源ともいうべき量で，この量を通じて反応の前後で粒子の生成や消滅が起こる．我々が実験で測る量は始状態 $|\mathrm{i}\rangle$ から終状態 $|\mathrm{f}\rangle$ に変化する際の遷移確率である．作用積分が与えられると理論的に遷移確率を求めることができる．このようにして，実験値と理論値を比較することにより理論の成否，および模型（特定のラグランジアン密度，ハミルトニアン密度）の成否を検証

することができる．

3.3.1.1　フェルミオンについての場の量子論

電子を含むフェルミオンの特徴は**パウリの排他律**（Pauli's exclusion principle）「フェルミオンは同時に同じ状態に存在することができない」に従うことである．この特徴は反交換関係で記述される調和振動子の性質「$c^\dagger(t)^2|0\rangle = 0$ が成立するため，N の固有状態は 2 つの状態 $|0\rangle$，$|1\rangle$ しか許されない」と似ている．これらのことを踏まえて，(3.109) に従うフェルミオンの場の一般解を，

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_l C_l(t)\phi_l(\boldsymbol{x}) \ , \quad \Pi(\boldsymbol{x},t) = \sum_l i\hbar C_l^\dagger(t)\phi_l^*(\boldsymbol{x}) \tag{3.136}$$

とし，量子条件

$$\begin{aligned}&\{\Psi(\boldsymbol{x},t),\Pi(\boldsymbol{y},t)\} = i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad \{\Psi(\boldsymbol{x},t),\Psi(\boldsymbol{y},t)\} = 0,\\ &\{\Pi(\boldsymbol{x},t),\Pi(\boldsymbol{y},t)\} = 0\end{aligned} \tag{3.137}$$

を課す．このとき，$C_l(t)$，$C_l^\dagger(t)$ は演算子で量子条件

$$\left\{C_l(t), C_{l'}^\dagger(t)\right\} = \delta_{ll'}, \ \{C_l(t), C_{l'}(t)\} = 0, \ \left\{C_l^\dagger(t), C_{l'}^\dagger(t)\right\} = 0 \tag{3.138}$$

を満足する．エネルギー演算子 $H_{場}$ は

$$H_{場} = \int \Psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)H\Psi(\boldsymbol{x},t)d^3\boldsymbol{x} = \sum_l E_l C_l^\dagger(t)C_l(t) = \sum_l E_l C_l^\dagger C_l \tag{3.139}$$

で与えられる．ここで，$C_l = C_l(0)$，$C_l^\dagger = C_l^\dagger(0)$ である．固有値方程式 $H_{場}|n_1, n_2, \cdots\rangle = E|n_1, n_2, \cdots\rangle$ の解は，

$$E = \sum_l E_l n_l \ , \quad |n_1, n_2, \cdots\rangle = \prod_l {C_l^\dagger}^{n_l}|0\rangle \tag{3.140}$$

で与えられる．ここで，n_l は $N_l \equiv C_l^\dagger C_l$ の固有値で 0 または 1 である．個数演算子は $N_{場} \equiv \int \Psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x},t)d^3x = \sum_l C_l^\dagger(t)C_l(t) = \sum_l C_l^\dagger C_l$ で定義される．$|0\rangle$ は粒子が 1 個も存在しない状態を表し，

$$C_l|0\rangle = 0 \tag{3.141}$$

を満たす．C_l はエネルギーの値が E_l であるフェルミオンを消滅させる演算子（消滅演算子），$C_l^\dagger$ はエネルギーの値が E_l であるフェルミオンを生成させる演算子（生成演算子）と解釈される．また，生成演算子に対して ${C_l^\dagger}^2|0\rangle = 0$ が成り立ち，この関係はパウリの排他律を意味する．また，N 粒子に関する波動関数は (3.132) において，任意の同種粒子の入れ替えに対して反対称になるように適切に負符号を挿入して和を取ることにより構成される．

3.3.2 相対論的場の量子論

場の解析力学で記述される系に対して，正準量子化を行うことにより場の量子論が構成されることがわかった．この項では相対論的な場合について考察する．**相対論的場の量子論において，素粒子は相対論的な波動方程式に従う生成・消滅を表す場の演算子とみなされる．**

相対論的場の量子論において，一般的に成り立つ 2 つの定理を証明抜きで紹介する．

> **スピンと統計の定理**：整数スピンの粒子はボース・アインシュタイン統計に従うボソンで交換関係のもとで量子化される．半奇数スピンの粒子はフェルミ・ディラック統計に従うフェルミオンで反交換関係のもとで量子化される．

> **CPT 定理**：相互作用が局所的で本義ローレンツ変換のもとで不変であるという条件下で，いかなる相互作用も CPT 変換のもとで不変である．ただし，変換の順序には依らない．

ここで，CPT 変換とは荷電共役変換（C 変換），空間反転（P 変換），時間反転（T 変換）を合成した変換である（4.2.2 項参照）．CPT 定理から，「素粒子には粒子と対となる**反粒子**（antiparticle）（反粒子が粒子と一致する場合を含む）が存在し，反粒子の質量は粒子の質量と等しく，電荷は粒子の電荷と大きさが等しく符号が反対である」という特質が導かれる．

場の量子論の一般的性質より，**ディラック場の演算子はディラック粒子の波動関数と同じディラック方程式に従う**．以後，電子場の演算子を大文字を用いずに電子波の波動関数と同じ $\psi(x)$ で表すことにする．自由な電子場に関するラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} = c\overline{\psi}(x)i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m_{\mathrm{e}}c^2\overline{\psi}(x)\psi(x), \tag{3.142}$$

あるいはエルミートなもの

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2}c\overline{\psi}i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{1}{2}c(\partial_{\mu}\overline{\psi})i\hbar\gamma^{\mu}\psi - m_{\mathrm{e}}c^2\overline{\psi}\psi \tag{3.143}$$

である．ここで，2 つのラグランジアン密度は全微分の項 $-\frac{1}{2}\partial_{\mu}(c\overline{\psi}i\hbar\gamma^{\mu}\psi)$ だけ異なり，同じ物理を記述する．以後，(3.142) を用いることにする．また，$\overline{\psi}(x) = \psi^{\dagger}(x)\gamma^0$ は**ディラック共役**とよばれる量で，本義ローレンツ変換のもとで，

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x') &= \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)S(\Lambda)^{\dagger}\gamma^0 \\ &= \psi^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^0S(\Lambda)^{\dagger}\gamma^0 = \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\end{aligned} \tag{3.144}$$

のように変換する．ここで，$(\gamma^0)^2 = I$，$\gamma^0(\gamma^{\mu})^{\dagger}\gamma^0 = \gamma^{\mu}$ を用いた．よって，

$\overline{\psi}(x)\psi(x)$ は本義ローレンツ変換のもとで，

$$\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\psi(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x) \tag{3.145}$$

となりスカラー量である．一方，$\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ は

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') &= \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) \\ &= \overline{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\overline{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)\end{aligned} \tag{3.146}$$

となりベクトル量で，(3.142) の $\mathscr{L}_{\rm D}$ の第 1 項もローレンツ変換のもとで不変であることがわかる．ここで，$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^\dagger\psi, \psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi)$ で，$\psi^\dagger\psi$ は個数密度（電子数密度）である．また，ハミルトニアンは

$$H_{\rm D} = \int \pi(x)\left(-c\gamma^0\sum_{i=1}^{3}\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{m_{\rm e}c^2}{i\hbar}\gamma^0\right)\psi(x)d^3x \tag{3.147}$$

で与えられる．ここで，$\pi(x)(= i\hbar\psi^\dagger(x))$ は $\psi(x)$ に正準共役な場である．ハイゼンベルク方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \frac{1}{i\hbar}[\psi(x), H_{\rm D}], \quad \frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = \frac{1}{i\hbar}[\pi(x), H_{\rm D}] \tag{3.148}$$

がディラック方程式と等価であるという条件と電子はパウリの排他律に従うという性質から，反交換関係に基づく量子条件

$$\begin{aligned}&\{\psi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{y},t)\} = i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad \{\psi(\boldsymbol{x},t), \psi(\boldsymbol{y},t)\} = 0, \\ &\{\pi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{y},t)\} = 0\end{aligned} \tag{3.149}$$

が課される．

自由な電子場に関する一般解は

$$\begin{aligned}\psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2p^0}}\sum_{s=\pm}&\Big(c_s(\boldsymbol{p})u(\boldsymbol{p},s)e^{-\frac{i}{\hbar}px} \\ &+ d_s^\dagger(\boldsymbol{p})v(\boldsymbol{p},s)e^{\frac{i}{\hbar}px}\Big)\end{aligned} \tag{3.150}$$

のように表される．ここで，s はスピン状態を表す変数，$u(\boldsymbol{p},s)$ と $v(\boldsymbol{p},s)$ はディラックスピノルとよばれる 4 成分量（運動量空間におけるディラック方程式の解）である．$c_s(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$，s の状態の電子の消滅演算子，$d_s^\dagger(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$，s の状態の陽電子（電子の反粒子）の生成演算子と解釈される．また，$c_s^\dagger(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$，s の状態の電子の生成演算子，$d_s(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$，s の状態の陽電子の消滅演算子と解釈される．(3.150) の右辺の被積分関数の第 2 項は $e^{\frac{i}{\hbar}px} = e^{\frac{i}{\hbar}(p^0x^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$ ($p^0 > 0$) を含み，相対論的量子力学における負エネルギー解に相当する．**場の量子論では，この項は正エネルギーを有する陽電子の生成をつかさどるはたらきをする（負エネルギーをもつ電子の消滅は正エネルギーをもつ陽電子の生成と等価である）とみなされ，負エネルギー解の問題が解消される．**

3.4 振り返りと見通し

- 物質粒子とは何か？
- 場の演算子とは何か？
- なぜ，場の演算子を扱うのか？
- 場の演算子が従う方程式はどんな形をしているのか？

という疑問を頭の片隅に置きながら，量子論を紹介した．

わかったことは，素粒子は場の演算子とよばれる量で表され，次のような特徴を有していることである．

- 3 次元空間における 1 粒子に関する波動方程式と同じ形の方程式に従う場でありながら，多粒子系を一挙に扱うことができる．
- 固有関数で展開したとき，展開係数が粒子の生成や消滅をつかさどる演算子のはたらきをする．
- 場とそれに正準共役な場の間に交換関係，あるいは反交換関係に基づく量子条件が課される．
- 電子場はスピンの自由度を含み，電子の消滅と陽電子の生成をつかさどる．
- 相対性理論と量子論の融合により，「スピン」と「反粒子」が派生する．

このような特徴が「場の演算子とは何か？」,「なぜ，場の演算子を扱うのか？」,「場の演算子が従う方程式はどんな形をしているのか？」という問いかけに対する答えである．場の量子論において，粒子と場が同義語として用いられる理由がわかったことと思う．「物質粒子とは何か？」については，電子のほかにも様々な粒子が見つかっていて，第 6 章，第 7 章，第 8 章で答えを見いだす．

電子に関する場の演算子はディラック方程式に従う．ディラック方程式を導くラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} = c\overline{\psi}(x)i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m_{\mathrm{e}}c^2\overline{\psi}(x)\psi(x) \tag{3.151}$$

で与えられる．これと素粒子の標準数式 (1.1) を見比べると，右辺の第 1 項同士が同一のものであると予想される．実際，「煩雑さを避けるため，光の速さ c，換算プランク定数 $\hbar$，座標変数 x を記載しない」および「$\gamma^{\mu}\partial_{\mu}$ を $\not{\partial}$ と記す」というルールのもとで $c\overline{\psi}(x)i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)$ が $\overline{\psi}i\not{\partial}\psi$ （(1.1) の右辺の第 1 項）と一致することがわかる．最初のルールは,「c や $\hbar$ は次元を有する定数であるため必要に応じていつでも復活させることができる」という性質に基づく (4.2.4 項参照)．

(1.1) には (3.151) の右辺の第 2 項に相当する項が見当たらない．「素粒子の標準数式は電子を含まない」という選択肢も考えられるが，電子がより基本的なものからつくられているという証拠は見つかっていないので電子は素粒子の 1 つであるという立場を貫くことにしよう．すると新たな疑問として，

「$m_e = 0$ なのか？」が生じる．すなわち，「素粒子の標準数式のレベルで，電子を含む物質粒子の質量はすべて 0 なのか？」，さらに，「物質粒子の質量はどのようにして生成されるのか？」という疑問が派生する．

物体の「運動」を支配する法則・方程式（ニュートンの運動方程式，…，ディラック方程式）の理解が進んだことと思う．時空構造（時空の対称性）が方程式の形に反映していることも把握できたことと思う．例えば，ディラック方程式はローレンツ変換のもとで共変である．次章では物体にはたらく「力」に着目する．

第 4 章
電磁相互作用の理論

「B_μ（ゲージ場）が何を表しているのか？」の手がかりを得るために，電磁気学とその量子論である量子電磁力学について紹介する．前半で素粒子の標準数式の解読の予行練習としてマクスウェル方程式の解読に挑む．後半で量子電磁力学の基本数式の暗号化を行う．

4.1 電磁気学

電磁気学はマクスウェル方程式（Maxwell's equations）とよばれる方程式を基礎方程式・基本法則とする理論である．マクスウェル方程式は 4 組の方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}, \tag{4.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{4.4}$$

からなる．まずは，これらの数式の解読，すなわち，電荷を帯びた物体にはたらく電磁気力に関する法則の解明から始めよう．

4.1.1 対象，舞台，法則

解読の糸口として，電磁気学の対象，舞台，法則について述べる．

電磁気学の対象は荷電粒子を含む帯電した物体で，電磁相互作用を担う実体は電場および磁場（まとめて電磁場とよばれる）である．多くの場合，荷電粒子は古典論では**点電荷**（point charge）とよばれる一定の電荷をもち大きさが無視できる点として扱われる．参考までに，量子論では荷電粒子および電磁場は場の演算子で表される（4.2 節参照）．

電磁波の正体は（のちほど明らかになるが）光である．真空中においてあら

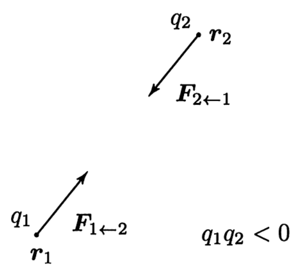


図 4.1　クーロン力.

ゆる慣性系で光の速さが一定であることが実験で確かめられている．すなわち，電磁気現象の舞台はミンコフスキー時空である．ただし，マクスウェル方程式の解読の段階では，時空構造に固執せず，3 次元ベクトルによる表記，例えば，座標変数として $\boldsymbol{r}$，時間変数として t を用いる．ローレンツ変換のもとで共変な定式化を行う際には 4 次元的な表記（4 元ベクトル等）を使用する．

実験を通して電気現象と磁気現象に関する様々な法則が発見された．ここでは，クーロンの法則，ビオ・サバールの法則，ファラデーの電磁誘導の法則に着目する．これらの法則はいずれも限定された物理系において成り立つ法則であることを忘れないでおこう．

静止した荷電粒子の間には**クーロン力**（Coulomb force）とよばれる静電気力がはたらき，次のような法則が成り立つ．

> **クーロン（Coulomb）の法則**：電荷 q_1 の物体 1 と電荷 q_2 の物体 2 の間には，それらの電荷の積に比例し，物体間の距離 $r(=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)$ の 2 乗に反比例する力（クーロン力）がはたらく．電荷が同符号の場合（$q_1q_2>0$）は斥力で，異符号の場合（$q_1q_2<0$）は引力である．

ここで，物体 1，物体 2 の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ とした（図 4.1 参照）．クーロンの法則より，物体 1 が物体 2 から受ける力 $\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}$ は

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}\boldsymbol{e}_{12},\quad \boldsymbol{e}_{12}=\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} \tag{4.5}$$

と表される．さらに，ε_0 は真空中の**誘電率**で，その値は $\varepsilon_0 \doteqdot 8.854\times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N{\cdot}m^2)}$ である．C は電荷の単位を表す記号でクーロンとよぶ．ちなみに，乾燥した空気の誘電率は真空の誘電率の 1.00054 倍ほどである．

一定の電流により生成される静磁場に関して，次のような法則が成り立つ．

> **ビオ・サバール（Biot-Savart）の法則**：一定の電流が図 4.2 のように導線 Γ に沿って流れているとき，導線の微小部分 $\Delta\boldsymbol{r}_k$ を流れる電流がそのまわりにつくる磁束密度 $\Delta\boldsymbol{B}$ の大きさは電流の大きさ I に比例し，$\Delta\boldsymbol{r}_k$ からの距離 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k|$ の 2 乗に反比例する．磁束密度の向きは $\Delta\boldsymbol{r}_k$ と $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k$ に垂直な向きである．

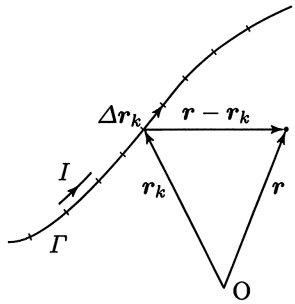


図 4.2　導線に流れる電流.

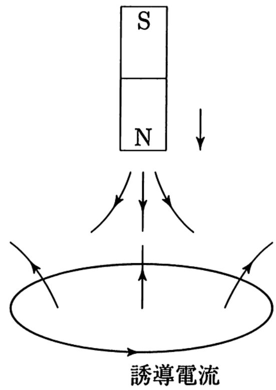


図 4.3　電磁誘導.

ビオ・サバールの法則を式で表すと,

$$\Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta \boldsymbol{r}_k \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_k)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_k|^3} \tag{4.6}$$

となる．ここで，μ_0 は真空の**透磁率**で，その値は $\mu_0 \fallingdotseq 1.26 \times 10^{-6}\ \mathrm{N/A^2}$ である．ちなみに，空気 (20 C°) の透磁率は真空の透磁率の 1.00000036 倍ほどである．(4.6) を積分することにより，電流全体がつくる磁束密度 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ に関する次のような公式が得られる．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{Id\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}. \tag{4.7}$$

時間変動する磁場に関して，次のような法則が成り立つ．

> **ファラデー（Faraday）の電磁誘導の法則**：コイルに発生する誘導起電力の大きさ V はコイルを貫く磁束 Φ の単位時間当たりの変化量に比例する．

電磁誘導の法則を式で表すと，1 巻きのコイルに関して，

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{4.8}$$

となる．負符号は**レンツの法則**（Lenz's law）「誘導起電力は，それにより流れる誘導電流が生成する磁束が，外部磁束の変化を打ち消すような向きに生じる」を意味する（図 4.3 参照）．

4.1.2　マクスウェル方程式の解読

マクスウェル方程式の解読，すなわち，(4.1)，(4.2)，(4.3)，(4.4) がそれぞれどのような電気・磁気的な法則を記述するのか解明しよう．出発点として，クーロンの法則，ビオ・サバールの法則，ファラデーの電磁誘導の法則，電荷の保存則を採用する．解読においてベクトル解析を駆使する．

4.1.2.1　クーロンの法則再考

力の場という概念に基づいて，クーロンの法則を再考する．物体 2 が物体 1 に及ぼすクーロン力は

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}(\boldsymbol{r}) = q_1\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}, \tag{4.9}$$

あるいは

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2}(\boldsymbol{r}) = -q_1\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}), \quad U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.10}$$

と表される．ここで，物体 1，物体 2 の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$ に代えた．$\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ は（物体 1 とは無関係に）物体 2 の電荷と位置のみで決まる量で**電場**（**電界**）とよばれる力の場である．また，U は物体 2 により発生する静電気力による位置エネルギーである．ちなみに，単位電荷当たりの静電気力による位置エネルギー $V = U/q_2$ は**電位**とよばれる．

このような書き換えを通して，力を次のように捉え直すことができる．

力とは力の場や位置エネルギーを介した相互作用である．

具体的には，物体の存在により，その物体の属性に応じて，そのまわりに力の場が生成される．別の物体はその力の場を感じて力を受ける．例えば，物体 2 が電荷 q_2 をもつ場合，物体 2 のまわりに電場 $\boldsymbol{E}$ が発生する．電荷 q_1 をもつ別の物体 1 は $\boldsymbol{r}$ で電場を感じて，電荷に比例する力 $q_1\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を受ける（図 4.4 参照）．物体 1 と物体 2 の役割を逆転することも可能で，**力とは力の場を介して相互に作用を及ぼし合うことである**と解釈される．このような性質により，場の理論において「力」と「相互作用」は同義語として使われる．

電荷が空間内に $\rho(\boldsymbol{r}')$ で分布しているとき，$\boldsymbol{r}$ に存在する電荷 q の物体が受けるクーロン力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r', \tag{4.11}$$

あるいは

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -q\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}), \quad U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \tag{4.12}$$

である．ここで，$d^3r' = dx'dy'dz'$，V は 3 次元の閉じた領域で，$\rho(\boldsymbol{r}')$ は**電荷密度**とよばれる．(4.11) で与えられた $\boldsymbol{E}$ の発散と回転を計算することにより，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}, \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \tag{4.14}$$

が導かれる．ここで，公式

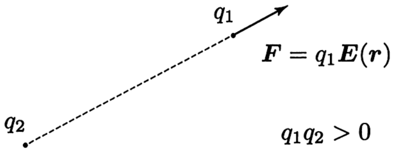


図 4.4　電場を介した作用.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = \boldsymbol{0} \tag{4.15}$$

を用いた. $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ とすると, (4.13) は $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ となり, (4.1) と同じ形になる. ここで, $\boldsymbol{D}$ は**電束密度**とよばれる. 静止した電荷により, そのまわりに発散状の電場が生成されることがわかる. 電荷の分布が時間変動する場合も, 電荷は連続的に移動すると考えられるので, (4.13) と同形の方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}, t) \tag{4.16}$$

が成り立つと予想するのが自然である. のちほど (4.16) の整合性を確かめる.

(4.16) の両辺を 3 次元空間の領域 V で積分し, **ガウスの発散定理**

$$\int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} d^3 r = \oint_{\partial \mathrm{V}} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.17}$$

を用いて,

$$\oint_{\partial \mathrm{V}} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{V}} \rho d^3 r \tag{4.18}$$

が導かれる. ここで, ∂V は V の表面で 2 次元の閉曲面である (図 4.5 参照). また, $d\boldsymbol{S}$ は微小面積要素の面積 dS と面に垂直な単位法線ベクトル $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ を用いて $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} dS$ と表される. (4.16) およびその積分形である (4.18) は**ガウスの法則** (Gauss' law) とよばれる.

4.1.2.2　ビオ・サバールの法則再考

断面積 dS' の導体の $\boldsymbol{r}'$ の地点を流れる電流は図 4.6 を参照すると,

$$I d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') dS' dr' = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') d^3 r' \tag{4.19}$$

と表されるので, これを用いて, (4.7) は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathrm{V}} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} d^3 r' \tag{4.20}$$

と書き換えられる. ここで, $\boldsymbol{j} = (j_x, j_y, j_z)$ は**電流密度**である.

さらに, (4.20) は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathrm{V}} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d^3 r' \tag{4.21}$$

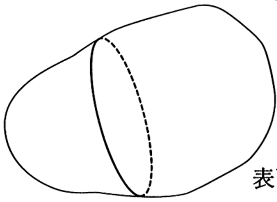


図 4.5　3 次元の領域とその表面.

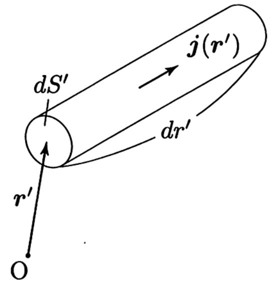


図 4.6　導体に流れる電流.

と書き換えられる．ここで，$\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルとよばれる量である．実際，(4.21) で与えられた $\boldsymbol{A}$ の回転を計算することにより，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{\mathrm{V}}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{V}}\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{V}}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r' \end{aligned} \tag{4.22}$$

が導かれる．ここで，公式

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{4.23}$$

を用いた．

(4.21) で与えられる $\boldsymbol{B}$ の発散と回転を計算することにより，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{4.24}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{4.25}$$

が導かれる．ここで，公式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0,\quad \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}, \tag{4.26}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{4.27}$$

および定常電流の保存則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0$ と無限遠方で電流が $\boldsymbol{0}$ であることから導かれる関係式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{V}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{V}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{V}}\boldsymbol{\nabla}'\cdot\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'))\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{|r|=\infty}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

を用いた．磁場が時間変動する場合も，(4.24) と同形の方程式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{4.29}$$

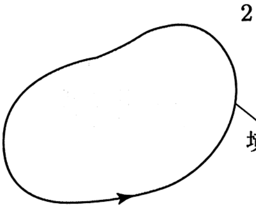


図 4.7　2 次元の領域とその境界.

が成り立つと予想するのが自然である．のちほど (4.29) の整合性を確かめる．(4.29) は (4.3) と同じ形であることに注目しよう．(4.1) と比較すると，発散状の磁場や磁束密度を生成するような磁荷を担う源が存在しないことを示唆している．実際に，電気については正電荷，あるいは負電荷のみをもつ粒子が存在するが，磁気に関しては N 極，あるいは S 極のみをもつ**磁気単極子**（あるいは**単磁極**）（magnetic monopole）とよばれる実体は見つかっていない．

(4.25) から，電流が流れるとき，すなわち，電荷の移動に伴い，そのまわりに回転状の磁束密度が生成されることがわかる．(4.25) の両辺を 2 次元の領域（曲面）S に関して積分し，**ストークスの回転定理**

$$\int_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\partial \mathrm{S}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.30}$$

を用いて，

$$\oint_{\partial \mathrm{S}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.31}$$

が導かれる．ここで，∂S は S の境界で閉曲線である（図 4.7 参照）．(4.25) およびその積分形 (4.31) は**アンペールの法則**（Ampère's law）とよばれる．

4.1.2.3　ファラデーの電磁誘導の法則再考

1 巻きのコイルに発生する大きさ $V(t)$ の誘導起電力，コイルを貫く磁束 $\Phi(t)$ は電場 $\boldsymbol{E}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いて，それぞれ

$$V(t) = \oint_{\partial \mathrm{S}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{r}, \quad \Phi(t) = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.32}$$

と表される．これらを用いて，(4.8) は

$$\oint_{\partial \mathrm{S}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.33}$$

と表される．さらにストークスの回転定理

$$\int_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\partial \mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.34}$$

を用いて，$\displaystyle\int_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{S}$ が成り立ち，

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{4.35}$$

が導かれる．ファラデーの電磁誘導の法則を表す (4.35) は (4.14) の拡張で (4.4) と同じ形をしている．

4.1.2.4　電荷の保存則

(4.16) の両辺を t で微分して，$\dfrac{\partial}{\partial t}$ と ∇ の順序を交換し移行することにより，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0 \tag{4.36}$$

が導かれる．(4.36) と電荷の保存則を表す連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{4.37}$$

との整合性から，

$$\boldsymbol{j} = -\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{X} \tag{4.38}$$

が導かれる．ここで，$\boldsymbol{X}$ は 3 次元ベクトルである（$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{X}) = 0$ を思い出そう）．さらに静磁場のときにアンペールの法則 $\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$，すなわち，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times (\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})/\mu_0)$ が成り立つので，このとき $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}/\mu_0$ と考えられ，さらに時間変動を伴う場合，

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{4.39}$$

が成り立つと予想するのが自然である．ここで，$\boldsymbol{H}(= \boldsymbol{B}/\mu_0)$ は**磁場**（**磁界**）とよばれる量である．(4.39) は $\boldsymbol{j}$ が時間変動する場合のアンペールの法則の拡張で (4.2) と同じ形をしていて，**マクスウェル・アンペールの法則**（Maxwell-Ampère law）とよばれる．$\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ は**変位電流**（displacement current）で，電束密度の時間変動によっても回転状の磁場が発生することがわかる．(4.35) と (4.39) を比べると，(4.35) には磁流密度ともいうべき電流密度に対応する量が存在しないことがわかる．これは磁気単極子の欠如と矛盾しない．

4.1.2.5　方程式の整合性と波動方程式

4 組の方程式 (4.1)，(4.2)，(4.3)，(4.4) および電荷の保存則 (4.37) を連立させて，その整合性の検証と波動方程式の導出を行う．

(4.2) の両辺の発散を計算し，$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = 0$，(4.37) を用いて，

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) = \nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},\ \text{すなわち，}\ \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho) = 0 \tag{4.40}$$

が導かれる．(4.40) は $\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho$ が時間に依存しないことを意味するが，(4.1) が成り立てば (4.40) は自動的に成り立つ．同様にして，(4.4) の両辺の発散を計算することにより，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})=0 \tag{4.41}$$

が導かれる．(4.41) は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}$ が時間に依存しないことを意味するが，(4.3) が成り立てば (4.41) は自動的に成り立つ．このようにして，(4.1)，(4.3) の整合性が確かめられた！ (4.1) と (4.3) は時間微分を含まないので，**拘束条件** (constraints) を表す．

残りの 2 組の方程式 (4.2) と (4.4) が電場や磁場の時間発展を記述する方程式に相当する．以下で，(4.2) と (4.4) を連立させて，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ が満たす方程式を導出する．(4.4) の両辺の回転を計算し，(4.2) を用いて，

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\rho-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j} \tag{4.42}$$

が導かれる．同様にして，(4.2) の両辺の回転を計算し，(4.4) を用いて，

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{j} \tag{4.43}$$

が導かれる．3 次元空間を速さ v で自由に伝わる波を記述する波動方程式

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)u(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{4.44}$$

と (4.42)，(4.43) を比較することにより，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ がいずれも速さ $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で伝搬することがわかる．電場の変化が磁場を生成し，磁場の変化が電場を生成するため，電荷や電流が存在しなくても，**電磁波** (electromagnetic wave) とよばれる電磁場の変動が伝わることに注意しよう．$\varepsilon_0 \doteqdot 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N{\cdot}m^2)}$ と $\mu_0 \doteqdot 1.26\times10^{-6}\ \mathrm{N/A^2}$ より，真空中の電磁波の速さは $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \doteqdot 3.00\times10^8\ \mathrm{m/s}$ となり，光の速さ c と一致する．すなわち，光は電磁波の一種で，真空中で

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{4.45}$$

が成り立つ．

$\rho=0$，$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$ において，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.46}$$

に従う．(4.46) の解として，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t),\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \tag{4.47}$$

を選んで電磁波の特徴を捉えよう．ここで，$\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{B}_0$ は定ベクトルとする．また，$\boldsymbol{k}$ は**波数ベクトル**とよばれる進行方向を表すベクトルである．(4.47) を (4.46) に代入することにより，

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0=-\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}_0,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0=\omega\boldsymbol{B}_0 \tag{4.48}$$

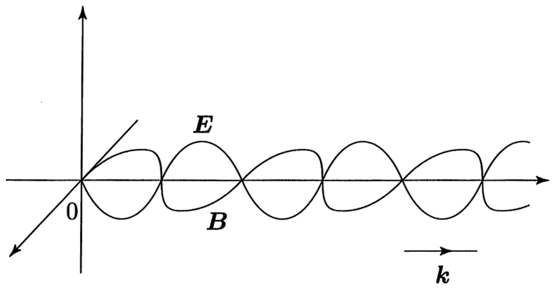


図 4.8　電磁波の伝搬.

が導かれる．(4.48) の第 1 式と第 3 式より，電磁波は**横波**（transverse wave）とよばれる進行方向に対して垂直な方向に振動する波であることがわかる．また，第 2 式と第 4 式より，$|\boldsymbol{k}| = \dfrac{\omega}{c}$ および電場の振動方向は常に磁場の振動方向と直交することがわかる（図 4.8 参照）.

このようにして，4 組の方程式 (4.1)，(4.2)，(4.3)，(4.4) が意味する電気・磁気的な法則および現象が垣間みられた！

4.1.3　マクスウェル方程式の書き換え

電磁ポテンシャルとよばれる 4 元ベクトルを用いてマクスウェル方程式を書き換えることにより，相対論的共変性が一目瞭然となることを示す．ミンコフスキー時空を舞台とするので，$\boldsymbol{r}$ の代わりに $\boldsymbol{x}$ と表記し，4 次元の座標表示 $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ を用いる.

(4.3) から，$\boldsymbol{B}$ はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて，

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{4.49}$$

と表される．さらに，(4.4) と (4.49) から，$\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi \tag{4.50}$$

と表される．ここで，ϕ はスカラーポテンシャルとよばれるが，ミンコフスキー時空上でスカラーではなく 4 元ベクトルの第 0 成分であることがのちほど判明する.

(4.50) を (4.1) に代入することにより，

$$-\boldsymbol{\nabla}^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.51}$$

が導かれる．(4.51) の左辺に $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ を加えて，両辺を c で割り，(4.45) を用いて変形することにより，

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{c}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right] = \mu_0 c\rho \tag{4.52}$$

が導かれる．同様にして，(4.49)，(4.50) を (4.2) に代入することにより，

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{c}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right] = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{4.53}$$

が導かれる．(4.52)，(4.53) から，（それらの左辺の第 2 項の存在をひとまず忘れて，）電荷，電流が存在するとそのまわりに ϕ, $\boldsymbol{A}$ が発生し，それらは光の速さ c で伝搬すると予想される．実際，のちほど考察するように，ϕ, $\boldsymbol{A}$ にはゲージ対称性とよばれる不変性に起因する不定性が存在し，$\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\phi}{c}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ となるように選ぶことができる．

(4.37) を，

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} \tag{4.54}$$

のように変形することにより，$j^\mu \equiv (c\rho, \boldsymbol{j})$ が 4 元ベクトルであることがわかる．j^μ は **4 元電流密度**とよばれる．さらに，(4.52)，(4.53) の右辺が $\mu_0 j^\mu$ であるから，

$$A^\mu \equiv \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right),\quad A_\mu \equiv \left(\frac{\phi}{c}, -\boldsymbol{A}\right) \tag{4.55}$$

で定義される A^μ や A_μ も 4 元ベクトルである．A^μ は**電磁ポテンシャル** (electromagnetic potential) とよばれ，これを用いて，(4.52) と (4.53) は

$$\Box A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = \mu_0 j^\nu \tag{4.56}$$

のようにローレンツ変換のもとで明白に共変な形で表される．ここで，$\Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2$, $\partial^\nu = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu} = (\partial^0, -\boldsymbol{\nabla})$, $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \boldsymbol{\nabla})$ である．$\Box$ は**ダランベール演算子**または**ダランベルシャン** (d'Alembertian) とよばれる微分演算子である．また，(4.56) は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{4.57}$$

と書き換えられる．ここで，

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

で，ローレンツ変換のもとで，

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(x) \tag{4.59}$$

のように 2 階反変テンソル場として変換する．ローレンツ変換のもとで，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が混ざり合うことに注目しよう．

(4.3) および (4.4) は

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \tag{4.60}$$

と表される．例えば，

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} &= \frac{\partial(-B_x)}{\partial(ct)} - \frac{\partial(E_z/c)}{\partial y} - \frac{\partial(-E_y/c)}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}\right)_x = 0\end{aligned} \tag{4.62}$$

が導かれる．(4.60) はビアンキの恒等式（Bianchi identity）とよばれる A^μ に関する恒等式である．すなわち，$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ のもとで，(4.60) は自動的に成立し，マクスウェル方程式は $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ に集約・暗号化される！

4.1.4 マクスウェル方程式に関する作用積分

作用積分

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{EM}} &= \frac{1}{c}\int \mathscr{L}_{\mathrm{EM}} d^4x, \\ \mathscr{L}_{\mathrm{EM}} &= -\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - A_\mu j^\mu \end{aligned} \tag{4.63}$$

に変分原理を適用することにより，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{EM}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{EM}}}{\partial A_\nu} = 0 \tag{4.64}$$

として (4.56) が導かれる．ちなみに，$F^{\mu\nu}(= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ を用いて，$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}$ は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \tag{4.65}$$

と表される．

電荷 q をもつ荷電粒子の運動について考察しよう．荷電粒子の軌道を $x^\mu = x^\mu(\tau)$ とすると，荷電粒子がつくる電流密度は

$$j^\mu(x') = cq\int \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\delta^4(x' - x(\tau))d\tau \tag{4.66}$$

と表される．実際，$\tau = t$，$x^0(\tau) = ct$，$x'^0 = ct'$ のとき，ディラックの δ 関数に関する公式 $\delta(c(t'-t)) = \dfrac{1}{c}\delta(t'-t)$ （$c > 0$）を用いて，

$$\rho(x') = \frac{j^0(x')}{c} = q\delta^3(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}(t')), \quad \boldsymbol{j}(x') = q\frac{d\boldsymbol{x}(t')}{dt'}\delta^3(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}(t')) \tag{4.67}$$

が導かれ，それぞれ非相対論的な場合の電荷密度，電流密度と一致する．(4.66) を (4.63) に代入することにより，S_{EM} の j^μ を含む項から

$$\frac{1}{c}\int(-A_\mu(x')j^\mu(x'))d^4x' = -\int qA_\mu(x)\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{4.68}$$

が導かれる．よって，荷電粒子に関する作用積分は

$$S_{粒子} = \int\left(-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} - qA_\mu\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)d\tau = \int \tilde{L}_{粒子}d\tau \tag{4.69}$$

$$= \int\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2} - q\phi + q\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)dt = \int L_{粒子}dt \tag{4.70}$$

で与えられる．

(4.69) に変分原理を適用して，荷電粒子に関する運動方程式

$$m\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = qF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{4.71}$$

が導かれる．実際，オイラー・ラグランジュ方程式に基づいて，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\tilde{L}_{粒子}}{\partial(dx^\mu/d\tau)}\right) - \frac{\partial\tilde{L}_{粒子}}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\left(-m\frac{dx_\mu}{d\tau} - qA_\mu\right) + q\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\\
&\quad = -m\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} - q\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} + q\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\\
&\quad = -m\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} + q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0
\end{aligned} \tag{4.72}$$

が得られる．さらに (4.58) を用いて，(4.71) は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{d\tau^2} = \frac{q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.73}$$

と表される．β が 0 の極限で (4.73) の右辺は $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ に帰着することがわかる．

(4.70) より，$\boldsymbol{x}$ に正準共役な運動量は

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L_{粒子}}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}} = \frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\boldsymbol{A} \tag{4.74}$$

で与えられ，ルジャンドル変換を用いて，ハミルトニアン H が

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - L_{粒子} = c\sqrt{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2 + m^2c^2} + q\phi \tag{4.75}$$

のように求められる．H の値がエネルギーに相当する．電磁相互作用を受けていない自由粒子の場合の $H = c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2c^2}$ と比べると，

$$H \;\Rightarrow\; H - q\phi \quad (p^0 \;\Rightarrow\; p^0 - qA^0), \quad \boldsymbol{p} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A} \tag{4.76}$$

のような置き換えにより，電磁相互作用が導入されることがわかる．

4.1.5 ゲージ対称性

(4.71) や (4.73) からわかるように，荷電粒子に関する運動方程式は

$F_{\mu\nu}(=\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$（すなわち，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$）に依存する．一方，$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}$，$L_{\text{粒子}}$，$H$ は A_μ（すなわち，ϕ，$\boldsymbol{A}$）に依存する．よって，**作用積分を出発点に取ると，電場や磁場（$F_{\mu\nu}$）よりも電磁ポテンシャル（A_μ）の方が基本的（あるいは本質的）**であると考えられる．ここで，電磁ポテンシャルは一意的に決まらないことに注意しよう．具体的には，

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla f) = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \nabla\phi' = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} + \nabla f) - \nabla\left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi \end{aligned}\tag{4.78}$$

のように，$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla f$ と $\phi' = \phi - \dfrac{\partial f}{\partial t}$ は $\boldsymbol{A}$ と ϕ と同じ $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ を与える．ここで，f は時空座標を変数にもつ積分可能な任意の実関数で，このような任意関数を含む変換

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla f, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.79}$$

は，一般に，**ゲージ変換**（gauge transformation）とよばれる．

A_μ を用いると，ゲージ変換 (4.79) は

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f \tag{4.80}$$

と表され，$F_{\mu\nu}$ はゲージ変換のもとで，

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu) f \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{4.81}$$

のように不変である．ゲージ変換のもとでの不変性は**ゲージ不変性**（gauge invariance），あるいは**ゲージ対称性**（gauge symmetry）とよばれる．

ゲージ変換を利用して，f をうまく選ぶことにより，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi'}{c}\right) + \nabla\cdot\boldsymbol{A}' \\ &\quad = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{c}\right) + \nabla\cdot\boldsymbol{A} - \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) f = 0\end{aligned}\tag{4.82}$$

のようにできる．すなわち，ゲージ対称性を用いて，$\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\phi}{c}\right) + \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ を満たすように A_μ を選ぶことができる．このように特定の条件式を用いて，電磁ポテンシャルを固定することを**ゲージ固定**（gauge fixing）という．ちなみに，上記のようなゲージ固定条件は**ローレンスゲージ**（Lorenz gauge）とよばれる．ローレンスゲージのもとで，(4.52)，(4.53) は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} \tag{4.83}$$

のようになる．

ちなみに，$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ はクーロンゲージ（Coulomb gauge）とよばれ，この条件のもとで，(4.52)，(4.53) は

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} - \nabla\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{c}\right)\right] \tag{4.84}$$

となる．ρ が与えられると，(4.84) の第 1 式から ϕ が決まる．また $\boldsymbol{A}$ のうち $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を満たすもの，すなわち，進行方向に対して垂直な成分が電磁波として伝搬するため，$\boldsymbol{A}$ の物理的な自由度は 2 である．

4.2 量子電磁力学

4.2.1 作用積分

電荷 q をもつ荷電粒子が質量 m のディラック粒子であるとして，電磁気学の量子論に関するラグランジアン密度を 2 通りの方法で構成する．

（その 1）電流密度に着目する方法

自由なディラック粒子に関するラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} = c\overline{\psi} i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \overline{\psi}\psi, \quad \overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \tag{4.85}$$

で（(3.142) 参照），マクスウェル方程式を導くラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - A_\mu j^\mu \tag{4.86}$$

で与えられる（(4.63) 参照）．これらを合体したもの，すなわち，$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} + \mathscr{L}_{\mathrm{EM}}$ が電磁気学の量子論のラグランジアン密度になると予想される．残る問題は電流密度 j^μ がどんな形になるかである．個数密度 $\psi^\dagger\psi$ に電荷 q を掛けたものが電荷密度（$\rho = j^0/c$）になることをヒントにして，

$$j^\mu = (cq\psi^\dagger\psi, cq\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi) = (cq\overline{\psi}\gamma^0\psi, cq\overline{\psi}\gamma^0\boldsymbol{\alpha}\psi) = cq\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{4.87}$$

という答えに至る．よって，ラグランジアン密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = & \ c\overline{\psi}\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi \\ & -\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - A_\mu cq\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\end{aligned} \tag{4.88}$$

が得られる．

（その 2）置き換えに基づく方法

置き換え (4.76) の量子版は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \ \Rightarrow \ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi, \quad -i\hbar\nabla \ \Rightarrow \ -i\hbar\nabla - q\boldsymbol{A}, \tag{4.89}$$

あるいは，4 元ベクトル表示では

$$i\hbar\partial_\mu = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}, i\hbar\boldsymbol{\nabla}\right) \;\Rightarrow\; i\hbar\partial_\mu - qA_\mu = i\hbar\left(\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar}A_\mu\right) \tag{4.90}$$

となる．自由なディラック粒子に関するラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{D}}$ に対して，(4.90) を施すことにより，$\psi(x)$ と $A_\mu(x)$ の間の相互作用が導入される．さらに，$A_\mu(x)$ に関する運動項 $-\dfrac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ を加えて，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} &= c\overline{\psi}\left\{i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar}A_\mu\right) - mc\right\}\psi \\ &\quad -\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= c\overline{\psi}\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi - cq\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &\quad -\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\end{aligned} \tag{4.91}$$

が得られる．

(4.88) と (4.91) が一致していることに注目しよう．$S_{\mathrm{QED}} = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int \mathscr{L}_{\mathrm{QED}}d^4x$ に基づく場の量子論は**量子電磁力学**（quantum electrodynamics），あるいは略して QED とよばれる．

今後，電荷を $q = eQ$ と表記する．ここで，e は**素電荷（電気素量）**（elementary electric charge）とよばれ，その値は $e \fallingdotseq 1.60 \times 10^{-19}$ C である．また Q は e を単位とした電荷で，電子の場合は $Q = -1$ である．本来，電荷とは q のことであるが，本書では Q に対しても電荷という名称を用いる場合がある．ちなみに，電子の場合の作用積分は

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{QED}} = \frac{1}{c}\int\Bigg[&c\overline{\psi}(x)\left\{i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{e}{\hbar}A_\mu(x)\right) - m_{\mathrm{e}}c\right\}\psi(x) \\ &-\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))\left(\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)\right)\Bigg]d^4x\end{aligned} \tag{4.92}$$

で，$\overline{\psi}(x)$ に関する変分からディラック方程式

$$\left\{i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{e}{\hbar}A_\mu(x)\right) - m_{\mathrm{e}}c\right\}\psi(x) = 0 \tag{4.93}$$

が導かれ，$A_\mu(x)$ に関する変分からマクスウェル方程式

$$\partial_\nu\left(\partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x)\right) = -\mu_0 ce\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{4.94}$$

が導かれる．電流密度（電磁カレント）に関する表式は

$$j^\mu(x) = -ce\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{4.95}$$

である．散乱過程などの摂動計算を行う際に，**ファインマンダイヤグラム**（Feynman diagram）とよばれる素粒子の伝搬や相互作用を視覚に訴える図式を使うと便利である．図に描かれた反応から確率振幅を組織的に構成することができる．図 4.9 は相互作用ラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = ce\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ に基づく素過程

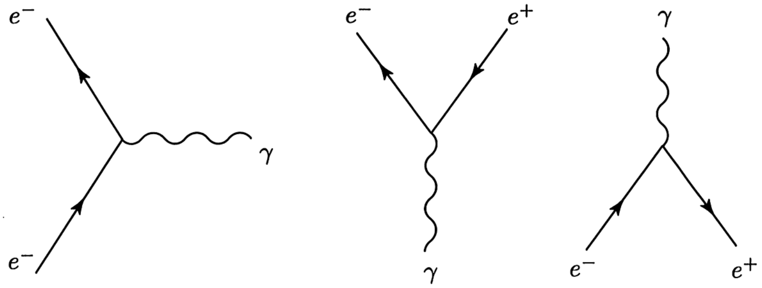


図 4.9　電子，陽電子，光子の相互作用を表すファインマンダイヤグラム．

$$e^- \to e^- + \gamma, \quad \gamma \to e^- + e^+, \quad e^- + e^+ \to \gamma \tag{4.96}$$

に対応するファインマンダイヤグラムである．素電荷 e が結合の強さを表す定数で，いずれの過程も同じ強さで起こることがわかる．ここで，e^-，e^+，γ はそれぞれ，電子，陽電子，光子を表す．

4.2.2　対称性

質量 m，電荷 $q(=eQ)$ をもつ荷電粒子に関して，$S_{\text{QED}} = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int \mathscr{L}_{\text{QED}} d^4x$ は以下のような変換のもとでの不変性を有する．

(1) 並進不変性：時空に関する平行移動

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (a^\mu\text{: 定ベクトル}),$$
$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x), \quad A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = A^\mu(x) \tag{4.97}$$

に対して系は不変である．保存量はエネルギーおよび運動量である．

(2) 本義ローレンツ不変性：本義ローレンツ変換

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad \det \Lambda^\mu{}_\nu = 1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1),$$
$$\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{4.98}$$

のもとで系は不変である．保存量は 4 次元角運動量である．

(3) 位相変換不変性：大局的 $U(1)$ 変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \quad (\alpha\text{: 実定数}),$$
$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) \tag{4.99}$$

のもとで系は不変である．保存量は荷電粒子数である．

(4) ゲージ不変性：局所的 $U(1)$ 変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}\psi(x),$$
$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x) \tag{4.100}$$

のもとで系は不変である（5.1 節参照）.

(5) 空間反転不変性：空間反転，パリティ変換

$$
\begin{aligned}
&t \to t' = t, \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}, \\
&\psi(x) \to \psi'(x') = e^{i\theta_{\mathrm{p}}}\gamma^0\psi(x) \quad (\theta_{\mathrm{p}}\text{: 実定数}), \\
&A^0(x) \to A'^0(x') = A^0(x), \quad \boldsymbol{A}(x) \to \boldsymbol{A}'(x') = -\boldsymbol{A}(x)
\end{aligned} \tag{4.101}
$$

のもとで系は不変である.

(6) 時間反転不変性：時間反転

$$
\begin{aligned}
&t \to t' = -t, \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}, \\
&\psi(x) \to \psi'(x') = e^{i\theta_{\mathrm{t}}}\gamma^1\gamma^3\psi(x) \quad (\theta_{\mathrm{t}}\text{: 実定数}), \\
&A^0(x) \to A'^0(x') = A^0(x), \quad \boldsymbol{A}(x) \to \boldsymbol{A}'(x') = -\boldsymbol{A}(x)
\end{aligned} \tag{4.102}
$$

のもとで系は不変である.

(7) 荷電共役不変性：荷電共役変換

$$
\begin{aligned}
&\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\theta_{\mathrm{c}}}\gamma^2\psi^*(x) \quad (\theta_{\mathrm{c}}\text{: 実定数}), \\
&A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = -A^\mu(x)
\end{aligned} \tag{4.103}
$$

のもとで系は不変である.

この他に，$m = 0$ のときにのみ成立する対称性が存在する．このような対称性は近似的対称性とよばれる.

(8) 軸性 $U(1)$ 変換不変性：軸性 $U(1)$ 変換

$$
\begin{aligned}
&\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\beta\gamma_5}\psi(x), \quad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x)e^{i\beta\gamma_5}, \\
&A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x)
\end{aligned} \tag{4.104}
$$

のもとで荷電粒子の質量項を除いて作用積分は不変である．ここで，β は実定数，$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ である.

(9) スケール変換不変性：スケール不変性

$$
\begin{aligned}
&x^\mu \to x'^\mu = \rho x^\mu \quad (\rho\text{: 実定数}), \\
&\psi(x) \to \psi'(x') = \rho^{-3/2}\psi(x), \quad A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \rho^{-1}A^\mu(x)
\end{aligned} \tag{4.105}
$$

のもとで荷電粒子の質量項を除いて作用積分は不変である．ちなみに，(8) と (9) の対称性は（$m = 0$ の場合でも）量子補正により壊れることが知られている.

様々な観点から対称性 [(1) ∼ (9)] を以下のように分類することができる.

- 厳密に成立する対称性 [(1) ∼ (7)] と近似的対称性 [(8), (9)]
- 時空に関する対称性 [(1), (2), (5), (6), (9)] と内部対称性（内部空間に関する対称性）[(3), (4), (7), (8)]

- 連続変換に関する対称性 [(1) ~ (4), (8), (9)] と離散的変換に関する対称性 [(5), (6), (7)]
- 大局的変換に関する対称性 [(1) ~ (3), (5) ~ (9)] と局所的変換に関する対称性 [(4)]

局所的変換に関する対称性は理論の構築に際し，非常に重要な役割を果たすことを第 5 章で述べる．以下では，空間反転と荷電共役変換について考察する．

空間反転とはローレンツ変換の一種で，$t' = t$，$\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$，すなわち，

$$x'^{\mu} = (\Lambda_{\mathrm{S}})^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad (\Lambda_{\mathrm{S}})^{\mu}{}_{\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.106}$$

で与えられる．空間反転のもとで $\psi(x)$ が，

$$\psi'(x') = P\psi(x) \tag{4.107}$$

のように変換するとする．このような変換は**パリティ変換**とよばれる．ここで，P は $\psi(x)$ に作用する 4×4 行列である．慣性系 I で成立するディラック方程式 (3.91) に対して，左から P を施すことにより，

$$\left[i\hbar P\gamma^{\mu}P^{-1}(\Lambda_{\mathrm{S}})^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - m_{\mathrm{e}}c\right]\psi'(x') = 0 \tag{4.108}$$

が導かれる．(4.108) が空間反転した系でのディラック方程式と一致するためには，

$$P\gamma^{\mu}P^{-1}(\Lambda_{\mathrm{S}})^{\nu}{}_{\mu} = \gamma^{\nu}, \quad \text{すなわち,} \quad (\Lambda_{\mathrm{S}})^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = P^{-1}\gamma^{\nu}P \tag{4.109}$$

が成り立てばよい．(4.109) を満たす P は

$$P = e^{i\theta_{\mathrm{p}}}\gamma^0 \quad (\theta_{\mathrm{p}}\text{: 実定数}) \tag{4.110}$$

で与えられる．ここで，P はユニタリー行列である ($P^{-1} = P^{\dagger}$)．

$\overline{\psi}(x)$ は空間反転のもとで，

$$\begin{aligned} \overline{\psi}'(x') &= \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)P^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)\gamma^0 P^{\dagger} \\ &= \psi^{\dagger}(x)\gamma^0 P^{-1} = \overline{\psi}(x)P^{-1} \end{aligned} \tag{4.111}$$

のように変換する．よって，$\overline{\psi}(x)\psi(x)$ は空間反転のもとで不変である．一方，$\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$ は空間反転のもとで，

$$\overline{\psi}'(x')\gamma^{\mu}\psi'(x') = \overline{\psi}(x)P^{-1}\gamma^{\mu}P\psi(x) = (\Lambda_{\mathrm{S}})^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi}(x)\gamma^{\nu}\psi(x) \tag{4.112}$$

のように変換する．∂_{μ} および $A_{\mu}(x)$ の変換性

$$\partial'_{\mu} = (\Lambda_{\mathrm{S}})_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}, \quad A'_{\mu}(x') = (\Lambda_{\mathrm{S}})_{\mu}{}^{\nu}A_{\nu}(x),$$

$$(\Lambda_{\mathrm{S}})_{\mu}{}^{\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.113}$$

および $(\Lambda_{\mathrm{S}})^{\mu}{}_{\nu}(\Lambda_{\mathrm{S}})_{\mu}{}^{\lambda} = \delta_{\nu}{}^{\lambda}$ より，$\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)$，$\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}(x)$ が空間反転のもとで不変であることがわかる．また，A_{μ} の運動項も変換 (4.113) のもとで不変である．このようにして，S_{QED} は空間反転のもとで不変であることが示される．

カイラル表示 (chiral representation)，あるいは**ワイル表示**とよばれる γ 行列の表示

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \overline{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{\mu} \equiv (I, \boldsymbol{\sigma}), \quad \overline{\sigma}^{\mu} \equiv (I, -\boldsymbol{\sigma}) \tag{4.114}$$

を用いると，質量 m の荷電粒子に関するディラック方程式は

$$\begin{pmatrix} -mc & i\hbar\sigma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + i\frac{q}{\hbar}A_{\mu}\right) \\ i\hbar\overline{\sigma}^{\mu}\left(\partial_{\mu} + i\frac{q}{\hbar}A_{\mu}\right) & -mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.115}$$

すなわち，

$$i\hbar\overline{\sigma}^{\mu}\left(\partial_{\mu} + i\frac{q}{\hbar}A_{\mu}\right)\xi - mc\eta^{*} = 0, \tag{4.116}$$

$$i\hbar\sigma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + i\frac{q}{\hbar}A_{\mu}\right)\eta^{*} - mc\xi = 0 \tag{4.117}$$

と表される．ここで，ξ，η^{*} はそれぞれ $\psi(x)$ における上の 2 成分，下の 2 成分で，本義ローレンツ変換のもとで異なる変換をする．実際，(4.114) を用いて $\sigma_{\mu\nu} = \dfrac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \sigma_{0i} &= i\gamma_0\gamma_i = -i\gamma^0\gamma^i = -i\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma^i & 0 \\ 0 & -i\sigma^i \end{pmatrix}, \\ \sigma_{ij} &= i\gamma_i\gamma_j = i\gamma^i\gamma^j = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \\ &= i\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.118}$$

となる．ここで，ε^{ijk} は 3 つの添字に関して完全反対称で $\varepsilon^{123} = 1$ である．ローレンツブーストのパラメータ $\boldsymbol{\omega} = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03})$，空間回転のパラメータ

$\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (-\omega^{23}, -\omega^{31}, -\omega^{12}) \quad (\theta^k = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega^{ij})$ を用いて，本義ローレンツ変換のもとでの $\psi(x)$ に関する変換行列は

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} \exp\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{4.119}$$

となり，ξ，η^* の変換性が異なることがわかる．ξ，η^* はいずれも**ワイルフェルミオン**，あるいは**カイラルフェルミオン**とよばれる量である．さらに，

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{4.120}$$

であるから，空間反転 $P = e^{i\theta_{\rm P}}\gamma^0$ により ξ と η^* が入れ替わることがわかる．

荷電共役変換は

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\theta_{\rm c}}\gamma^2\psi^*(x) = e^{i\theta_{\rm c}}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^* \\ \eta \end{pmatrix} = e^{i\theta_{\rm c}}\begin{pmatrix} \sigma^2\eta \\ -\sigma^2\xi^* \end{pmatrix} \equiv \psi^c(x) \tag{4.121}$$

で定義される．$\overline{\psi}(x)$ は荷電共役変換のもとで，

$$\overline{\psi^c}(x) = \psi^{c\dagger}(x)\gamma^0 = \psi^t(x)e^{-i\theta_{\rm c}}(\gamma^2)^\dagger\gamma^0 = -\psi^t(x)\gamma^2\gamma^0 e^{-i\theta_{\rm c}} \tag{4.122}$$

のように変換する．ここで，ψ^t は ψ の転置を表す．よって，$\overline{\psi}(x)\psi(x)$ は荷電共役変換のもとで，

$$\overline{\psi^c}(x)\psi^c(x) = -\psi^t(x)\gamma^2\gamma^0 e^{-i\theta_{\rm c}}e^{i\theta_{\rm c}}\gamma^2\psi^*(x) = -\psi^t(x)\gamma^0\psi^*(x) = -\psi^t(x)\overline{\psi}^t(x) = \left(\overline{\psi}(x)\psi(x)\right)^t = \overline{\psi}(x)\psi(x) \tag{4.123}$$

となり不変である．式変形において，$(\gamma^0)^t = \gamma^0$，1×1 行列は転置のもとで不変であること，フェルミオンの反可換性に由来して転置による入れ替えの際に負符号が生じることを用いた．一方，$\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ は荷電共役変換のもとで，

$$\begin{aligned}\overline{\psi^c}(x)\gamma^\mu\psi^c(x) &= -\psi^t(x)\gamma^2\gamma^0 e^{-i\theta_{\rm c}}\gamma^\mu e^{i\theta_{\rm c}}\gamma^2\psi^*(x) \\ &= -\psi^t(x)\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi^*(x) = \psi^t(x)(\gamma^\mu)^t\gamma^0\psi^*(x) \\ &= \psi^t(x)(\gamma^\mu)^t\overline{\psi}^t(x) = -\left(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right)^t = -\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\end{aligned} \tag{4.124}$$

のように変換する．また，$A_\mu(x)$ は荷電共役変換のもとで，

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = -A_\mu(x) \tag{4.125}$$

と変換するので，これらを組み合わせて，$\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$ が荷電共役変換のもとで不変であることがわかる．同様にして，微分項に関して，

$$\begin{aligned}\overline{\psi^c}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi^c(x) &= -(\partial_\mu\overline{\psi}(x))\gamma^\mu\psi(x)\\ &= \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \partial_\mu(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))\end{aligned} \tag{4.126}$$

が成り立つ．さらに，A_μ の運動項も変換 (4.125) のもとで不変である．このようにして，S_{QED} は荷電共役変換のもとで不変であることが示される．

カイラル表示において, 自由なディラック粒子のラグランジアン密度 (4.85) は

$$\mathscr{L}_{\text{D}} = c\xi^\dagger i\hbar\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi + c\eta^t i\hbar\sigma^\mu\partial_\mu\eta^* - mc^2(\eta^t\xi + \xi^\dagger\eta^*) \tag{4.127}$$

と表され，位相変換 $\xi \to e^{i\frac{\pi}{2}}\xi$，$\eta^* \to e^{-i\frac{\pi}{2}}\eta^*$ のもとで，微分項は不変なままで質量項の符号が変わる．この性質はラグランジアン密度においてフェルミオンの質量パラメータ m はその絶対値のみが物理的であることを意味する．

4.2.3 電磁場の量子化

古典論では，$A_\mu(x)$ はマクスウェル方程式に従うミンコフスキー空間内に実在する波動である．量子論では，$A_\mu(x)$ は場の演算子でそれが表す粒子は光子と考えられる．光子に関する量子論を考察しよう．

4.2.3.1 電磁ポテンシャルの解

物質が存在しない場合，マクスウェル方程式は

$$\Box A^\nu(x) - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{4.128}$$

で与えられる．この方程式はゲージ変換とよばれる変換

$$A^\nu(x) \to A'^\nu(x) = A^\nu(x) - \partial^\nu f(x) \quad (f(x)\text{：任意の実関数}) \tag{4.129}$$

のもとで不変である．ゲージ変換による不定性を除くために，ゲージ固定を行う．ローレンスゲージ $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ を選ぶと，

$$\Box A^\nu(x) = 0, \quad \partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{4.130}$$

という 2 つの式になる．ローレンスゲージを課しても，$\Box f(x) = 0$ を満足するようなゲージ変換の自由度が残っていて，これを用いて，$A^0(x) = 0$ と選ぶことができる．このとき，(4.130) は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{A}(x) = 0, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x) = 0 \tag{4.131}$$

となる．

$\boldsymbol{A}(x)$ は実数の場であるから，(4.131) の一般解は

$$A(x) = \int \left(a(k) e^{-i(\omega t - k\cdot x)} + a^*(k) e^{i(\omega t - k\cdot x)} \right) d^3k \tag{4.132}$$

で与えられる．ここで，$\omega = c|\boldsymbol{k}|$ および $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) = 0$ である．実際，これらの関係式を用いて，(4.132) が (4.131) を満たすことが示される．$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルで $\boldsymbol{A}(x)$ の進行方向を表すから，電磁場は 2 種類の横波成分からなることがわかる．よって，$\boldsymbol{k}$ に垂直で互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k})$ $(s = 1, 2)$ を導入して，横波に関する偏極を表すことにする．$\boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k})$ は

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k}) = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{s'}(\boldsymbol{k}) = \delta^{ss'}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{\varepsilon}^s(-\boldsymbol{k}) \tag{4.133}$$

を満たし，これらを用いて，(4.132) は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(x) &= \sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^3 \varepsilon_0}} \sum_{s=1,2} \int \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}} \\ &\quad \times \left(a_s(\boldsymbol{k}) e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} + a_s^*(\boldsymbol{k}) e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \right) d^3k \end{aligned} \tag{4.134}$$

と表される．係数は電磁場のエネルギーが (4.136) の形になるように選んだ．

4.2.3.2 電磁場のエネルギー

真空中の電磁場のエネルギー E_{EM} は，$A^0 = 0$ と選んだとき，$\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$，$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を用いて，

$$\begin{aligned} E_{\text{EM}} &= \int \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}^2(x) \right) d^3x \\ &= \int \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}(x)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \times \boldsymbol{A}(x) \right)^2 \right\} d^3x \end{aligned} \tag{4.135}$$

と表される．(4.134) を代入して，

$$E_{\text{EM}} = \sum_{s=1,2} \int \frac{1}{2} \hbar\omega(\boldsymbol{k}) \left(a_s^*(\boldsymbol{k}) a_s(\boldsymbol{k}) + a_s(\boldsymbol{k}) a_s^*(\boldsymbol{k}) \right) d^3k \tag{4.136}$$

が得られ，これより，**自由な電磁場は無限個の調和振動子の系と等価である**ことがわかる（3.1.4 項参照）．

4.2.3.3 光子場の量子化

展開係数 $a_s(\boldsymbol{k})$ および $a_s^*(\boldsymbol{k})$ を演算子とみなし，それぞれ $a_s(\boldsymbol{k})$ および $a_s^\dagger(\boldsymbol{k})$ と表す．さらに，これらの間に正準交換関係

$$\begin{aligned} &\left[a_s(\boldsymbol{k}), a_{s'}^\dagger(\boldsymbol{l}) \right] = \delta_{ss'} \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{l}) \quad (s, s' = 1, 2) \\ &\left[a_s(\boldsymbol{k}), a_{s'}(\boldsymbol{l}) \right] = 0, \quad \left[a_s^\dagger(\boldsymbol{k}), a_{s'}^\dagger(\boldsymbol{l}) \right] = 0 \end{aligned} \tag{4.137}$$

を課す．そのとき，$a_s(\boldsymbol{k})$ $(a_s^\dagger(\boldsymbol{k}))$ は偏極 $\boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k})$，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$，エネルギー $\hbar\omega(\boldsymbol{k})$ をもった光子を消滅させる（生成させる）演算子と解釈される．(4.137) は，

$A^i(x)$ とそれに正準共役な運動量の場 $\Pi_i(x) \equiv \partial \mathscr{L}_{\text{EM}}/\partial \dot{A}_i(x)$ の間に課される正準交換関係

$$[A^i(\boldsymbol{x},t),\Pi_j(\boldsymbol{y},t)] = i\hbar\left(\delta^i_j - \frac{\partial^i\partial_j}{\Delta}\right)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
$$[A^i(\boldsymbol{x},t),A^j(\boldsymbol{y},t)] = 0,\quad [\Pi_i(\boldsymbol{x},t),\Pi_j(\boldsymbol{y},t)] = 0 \tag{4.138}$$

と等価である．ここで，$i,j = 1,2,3$，$\Delta = \boldsymbol{\nabla}^2 = \sum_{k=1}^{3}\partial^k\partial_k$ である．さらに，$\frac{1}{\Delta}$ は $\frac{1}{\Delta}\delta^3(\boldsymbol{x}) \equiv -\frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{|\boldsymbol{p}|^2} = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}$ で定義される．無限大の零点エネルギーを差し引いて，ハミルトニアンを

$$H_{\text{EM}} \equiv \sum_{s=1,2}\int \hbar\omega(\boldsymbol{k})a^\dagger_s(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k})d^3k \tag{4.139}$$

で定義する．光子場の演算子

$$\boldsymbol{A}(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^3\varepsilon_0}}\sum_{s=1,2}\int\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}}$$
$$\times\left(a_s(\boldsymbol{k})e^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} + a^\dagger_s(\boldsymbol{k})e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}\right)d^3k \tag{4.140}$$

は次のハイゼンベルク方程式に従う．

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x) = \frac{1}{i\hbar}[\boldsymbol{A}(x),H_{\text{EM}}]. \tag{4.141}$$

エネルギーの一番低い状態は**真空状態**とよばれ，$|0\rangle$ と表される．真空状態に消滅演算子を作用させても新しい状態は生じない．すなわち，$a_s(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$ が成り立つ．偏極 $\boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k})$，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ をもった光子が 1 個存在する状態は $|\boldsymbol{k},s\rangle \equiv a^\dagger_s(\boldsymbol{k})|0\rangle$ で与えられる．また，偏極 $\boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k})$，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ をもった光子と偏極 $\boldsymbol{\varepsilon}^{s'}(\boldsymbol{l})$，運動量 $\hbar\boldsymbol{l}$ をもった光子が共存する状態は $|\boldsymbol{k},s;\boldsymbol{l},s'\rangle \equiv a^\dagger_s(\boldsymbol{k})a^\dagger_{s'}(\boldsymbol{l})|0\rangle$ で与えられ，(4.137) より $|\boldsymbol{k},s;\boldsymbol{l},s'\rangle = |\boldsymbol{l},s';\boldsymbol{k},s\rangle$ が導かれる．この性質はボース・アインシュタイン統計を表している．さらに，適当な数の生成演算子を掛けることにより，任意の個数をもった光子状態が生成される．

行列要素 $\langle 0|\boldsymbol{A}(x)|\boldsymbol{k},s\rangle$ を具体的に計算すると，

$$\langle 0|\boldsymbol{A}(x)|\boldsymbol{k},s\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^3\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^s(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}}e^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{4.142}$$

となる．これは 1 個の光子に関する波動関数と解釈され，

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\langle 0|\boldsymbol{A}(x)|\boldsymbol{k},s\rangle = 0\ ,\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle 0|\boldsymbol{A}(x)|\boldsymbol{k},s\rangle = 0 \tag{4.143}$$

のようにマクスウェル方程式に従う．

4.2.4 自然単位系

物理量を数量化する際に設ける基準を**単位**（unit）とよぶ．力学に現れる物理量は，質量 (M)，長さ (L)，時間 (T) という 3 種類の単位から組み立てられた単位をもつ．通常，質量をキログラム（kg），長さをメートル（m），時間を秒（s）とする **MKS 単位系**が使われる．MKS 単位系は我々の身のまわりの現象を記述する際には便利であるが，素粒子に関する現象に対しては適しているとは限らない．基本単位の設定には任意性があり，独立な単位をもつ 3 種類の物理量を基準にして定義すればよい．ここでは，

$$
\begin{aligned}
&\text{エネルギー}：[E] = ML^2T^{-2},\quad \text{速さ}：[v] = LT^{-1},\\
&\text{作用}：[S] = ML^2T^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.144}
$$

を選ぶことにする．エネルギーの単位としては，電子ボルト（eV），あるいはそれを 10^3 倍ずつしたもの（1 keV $= 10^3$ eV，1 MeV $= 10^6$ eV，1 GeV $= 10^9$ eV，1 TeV $= 10^{12}$ eV など）を用いる．また，速さ，作用に関してはそれぞれ物理定数である $c(\fallingdotseq 3.00 \times 10^8 \text{ m/s})$，$\hbar(\fallingdotseq 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s})$ を用いることにする．**素粒子の現象は相対論的な場の量子論を用いて記述されるので，c と $\hbar$ を採用するのは理にかなっている．** $\hbar c = 197 \times 10^{-15}$ MeV·m を覚えておくと換算の際に便利である．例えば，

$$
\frac{\hbar}{Mc} \fallingdotseq \left(\frac{\text{MeV}}{Mc^2}\right) \times 197 \times 10^{-15} \text{ m}
\tag{4.145}
$$

を用いて，質量を長さに換算することができる．

さらに，手間を省くために $\hbar = c = 1$ として，それらをあらわに表記しないことにする．次元解析を用いて，いつでも復活することができるので特に不都合が生じることはない．このようにして，**自然単位系**（natural unit）とよばれる，エネルギーの単位のみをあらわに用いる単位系が導入された．この単位系では，質量の逆数と長さと時間は同じ単位（eV^{-1}）をもつ．また，質量とエネルギーと運動量は同じ単位（eV）をもつ．よって，物理量の次元は質量のみで表される．このような次元は**質量次元**とよばれる．ちなみに，ラグランジアン密度の質量次元は 4 である．以後，多くの場合，自然単位系を用いる．

電荷 $q(= eQ)$，質量 m をもつ荷電粒子場 $\psi(x)$ に関する QED のラグランジアン密度を再度記載すると，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\text{QED}} = {}& c\overline{\psi}(x)\left\{i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{eQ}{\hbar}A_\mu(x)\right) - mc\right\}\psi(x)\\
&-\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x))
\end{aligned}
\tag{4.146}
$$

である．e と A_μ に対して，

$$
\frac{e}{\sqrt{\varepsilon_0\hbar c}} \to e,\quad \sqrt{\frac{c\varepsilon_0}{\hbar}}A_\mu(x) \to A_\mu(x)
\tag{4.147}
$$

のような再定義を施し，$c = \hbar = 1$ とすると，$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}$ は

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} &= \overline{\psi}(x)\left\{i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + ieQA_{\mu}(x)\right) - m\right\}\psi(x)\\ &\quad -\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x))(\partial^{\mu}A^{\nu}(x) - \partial^{\nu}A^{\mu}(x)) \qquad (4.148)\end{aligned}$$

と表される．このとき，微細構造定数は $\alpha \equiv \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \dfrac{e^2}{4\pi}$ と表される．さらに，(4.148) の左辺の第 1 項を展開し，「4 元ベクトル V_{μ} に対して，$\gamma^{\mu}V_{\mu}$ を $\not{V}$ と表記する」および「$\partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x)$ を $F_{\mu\nu}$ と表記する」というルールを導入して，(4.148) は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = \overline{\psi}i\not{\partial}\psi - m\overline{\psi}\psi - eQ\overline{\psi}\not{A}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (4.149)$$

という簡単な形になる．

4.3 振り返りと見通し

- ゲージ結合定数とは何か？
- ゲージ場（ゲージ粒子），ゲージ場の強さとは何か？
- なぜ，ゲージ場を扱うのか？
- ゲージ場が従う方程式はどんな形をしているのか？

という疑問を頭の片隅に置きながら，電磁気学とその量子論を紹介した．具体的には，電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式を解読し，さらに簡素な形の方程式 (4.57) に書き換えた．注目すべきことは，**電磁気学の法則がわずか 1 行の数式に暗号化されることである**．具体的には，

$$S = -\int \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x - \int\left(mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}} + qA_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)d\tau \quad (4.150)$$

から，マクスウェル方程式やローレンツ力が導かれる．さらに，**マクスウェル方程式の背後に相対論的共変性が潜んでおり，電気現象と磁気現象は電磁気現象として統一的に理解すべきものであることもわかった．**

先の問いかけに対して，ゲージ結合定数を素電荷，ゲージ場を電磁場または光子場と読み替えることにより，電磁相互作用に関して以下のような回答が得られる．

- 素電荷 e が電磁相互作用の強さを表す定数である．
- 電磁ポテンシャル $A_{\mu}(x)$ が光子を記述する場の演算子（光子場）となる．A_{μ} から構成された電磁場の強さ $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ はその成分として，電場 $\boldsymbol{E}$ や磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を含む．
- 光子場が電磁相互作用を媒介する役割を果たす．
- 光子場はマクスウェル方程式に従う．

加えて，**量子電磁力学のラグランジアン密度は自然単位系を用いて，**

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = \overline{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - m\overline{\psi}\psi - eQ\overline{\psi} A\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{4.151}$$

と表される．$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}$ に量子電磁力学の本質が網羅（もうら）される．

(4.151) と素粒子の標準数式 (1.1) の 1 行目と 2 行目を見比べると，eQ と g_1 が，$A\!\!\!/$ と $B\!\!\!/$ が，$F_{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu}$ が対応関係にあることがわかる．(1.1) において，A_μ ではなくて B_μ が用いられていることに注目しよう．すなわち，B_μ を用いた理由があるにちがいない．そこで新たな疑問として「B_μ は光子場を表す A_μ とは別ものなのか？」，「仮に別ものとすると光子場との関係はいかなるものか？」が生じる．

参考までに，**量子電磁力学はくりこみ可能な理論であるため予言能力が高いという特質をもつことを追記する**．ここで，くりこみ可能な理論とは量子補正に現れる発散量を有限個のパラメータや波動関数に押し込め，観測量に置き換えることにより，見かけ上無限大の量を取り除くことができる理論である．量子電磁力学におけるくりこみに関する研究は，朝永（S. Tomonaga），シュウィンガー（J. Schwinger），ファインマン（R. P. Feynman），ダイソン（F. J. Dyson）が中心となって発展させたもので，ゲージ対称性がくりこみ可能性に深く関わっていることが知られている．

第 5 章
ゲージ理論

ゲージ場（B_μ など）の役割を理解するために量子電磁力学を鑑にして，それを拡張した理論を構築する．ゲージ原理の威力を実感しながら読み進めてほしい．

5.1 ゲージ原理

量子電磁力学（QED）の成功の陰の立役者はゲージ対称性である．一般に対称性が高いほど，量子補正に伴う発散が抑えられる傾向がある．それは対称性が相互作用の形を限定し，異なる量子補正からの寄与の間で対称性を反映した相殺が起こることによる．我々の世界には，電磁気力以外に強い力（強い相互作用）とよばれる原子核を構成する力（あるいは，より微視的なレベルで原子核の構成要素である核子を構成する力）や弱い力（弱い相互作用）とよばれる原子核を崩壊させる力が存在する．これらの力の構造の解明に際し，QED をお手本にするのが賢明である．

QED のラグランジアン密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\rm QED} = &\overline{\psi}(x)\left\{i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ieQA_\mu(x)\right) - m\right\}\psi(x)\\ &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x))\end{aligned} \tag{5.1}$$

に注目しよう．まずは，$\mathscr{L}_{\rm QED}$ が局所的 $U(1)$ 変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}\psi(x), \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \tag{5.2}$$

のもとで不変であることを思い出そう．ここで，$\theta(x)$ は任意の積分可能な実関数である．これらの変換は $U(1)$ **ゲージ変換**とよばれる．

実際に，不変性は以下のように確かめられる．$\overline{\psi}(x)(= \psi^\dagger(x)\gamma_0)$ および $D_\mu\psi(x) \equiv (\partial_\mu + ieQA_\mu(x))\psi(x)$ は，$U(1)$ ゲージ変換のもとで，

$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x) e^{-iQ\theta(x)}, \tag{5.3}$$

$$D_\mu \psi(x) \to \left(\partial_\mu + ieQA'_\mu(x)\right) \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)} D_\mu \psi(x) \tag{5.4}$$

のように変換するため，$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}$ の第 1 項は不変である．また，$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}$ の第 2 項の不変性は

$$\begin{aligned} &\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \to \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &\quad = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e} \left(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu\right) \theta = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned} \tag{5.5}$$

からわかる．このように QED は $U(1)$ ゲージ不変性をもつ理論である．一般に，局所的変換に対する不変性を有する理論は**ゲージ理論**とよばれる．

ワイル（H. Weyl）が指摘したように QED に潜むゲージ対称性は，理論を構築するための指導原理の役割を果たす．具体的には，次のような原理を採用することにより，$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} = \overline{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi$ から $\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}$ を導くことができる．

ゲージ原理（gauge principle）：ゲージ変換とよばれる時空の各点で独立な変換を行っても物理法則は変わらない．

5.2 量子電磁力学の導出

実際に，QED を例に取って，ゲージ原理を用いて $\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}$ を導出してみよう．質量 m の自由なディラック粒子の運動を記述するラグランジアン密度，すなわち，ディラック方程式を導くラグランジアン密度

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} = \overline{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi \tag{5.6}$$

を出発点に取る．$\mathscr{L}_{\mathrm{D}}$ は大局的 $U(1)$ 位相変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iQ\alpha} \psi(x) \tag{5.7}$$

のもとでの不変性を有する．ここで，α は実定数である．

$\psi(x)$ は電荷 $q(= eQ)$ を有する荷電粒子に関する場の演算子（荷電場）であるとし，ゲージ原理を採用して，「$\psi(x)$ に関する局所的 $U(1)$ 位相変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)} \psi(x) \tag{5.8}$$

のもとで理論が不変になるべし」という要請を課す．すると，以下のような手順に従って $\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}$ が導出される．

1. 光子場に相当する $A_\mu(x)$ を導入し，偏微分 ∂_μ を共変微分 $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieQA_\mu(x)$ に置き換える．すなわち，

$$\partial_\mu \ \Rightarrow \ D_\mu \equiv \partial_\mu + ieQA_\mu(x) \tag{5.9}$$

とする．ここで，e は**ゲージ結合定数**（gauge coupling constant）とよば

れ，QED の場合は素電荷に相当する．

2. この置き換えにより，$\mathscr{L}_{\mathrm{D}}$ が

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{D}} = \overline{\psi}\left\{i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + ieQA_{\mu}\right) - m\right\}\psi \tag{5.10}$$

となり，荷電場 $\psi(x)$ と光子場 $A_{\mu}(x)$ の間の相互作用の形が決まる．

3. $D_{\mu}\psi(x)$ がゲージ変換のもとで，ゲージ共変性

$$D_{\mu}\psi(x) \to D'_{\mu}\psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}D_{\mu}\psi(x) \tag{5.11}$$

を有するという要請から，$A_{\mu}(x)$ に関するゲージ変換

$$A_{\mu}(x) \to A'_{\mu}(x) = A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta(x) \tag{5.12}$$

が導かれる．

4. 共変微分の間の交換関係

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] = ieQF_{\mu\nu}(x) \tag{5.13}$$

から導かれる

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x) \tag{5.14}$$

が**電磁場の強さ**として定義される．$F_{\mu\nu}(x)$ は (5.12) のもとで，

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) \tag{5.15}$$

となり，ゲージ不変性を有する（(5.5) 参照）．

5. 光子は質量 0 のボソンであるから質量 0 のクライン・ゴルドン方程式と同じ形の方程式に従うことが予想される．変分原理を通して，このような方程式を導くためにはラグランジアン密度として，光子場 A_{μ} を 2 次の形で，さらに偏微分も 2 次の形で含んだものがふさわしい．加えて，ローレンツ不変性とゲージ不変性を有する必要がある．このようなことから，光子場の運動項は $F_{\mu\nu}(x)(= \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x))$ の 2 次式として，

$$\mathscr{L}_{A} = -\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x))(\partial^{\mu}A^{\nu}(x) - \partial^{\nu}A^{\mu}(x)) \tag{5.16}$$

で与えられる．ここで，係数の $-1/4$ は変分原理によりマクスウェル方程式が導出されるように選んだ．こうして，光子場の運動項の形も決まる．

6. $\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{D}}$ と $\mathscr{L}_{A}$ を足し合わせることにより，$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}$ に到達する．

ここで，光子場の特徴を再確認しよう．

- 光子場に関するあからさまな質量項は，ゲージ不変性により許されない．実際に，質量項に相当する A_{μ} の 2 次式は (5.12) のもとで，

$$\frac{1}{2}m^{2}A_{\mu}A^{\mu} \to \frac{1}{2}m^{2}A'_{\mu}A'^{\mu}$$

$$= \frac{1}{2}m^2\left(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)\left(A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu\theta\right) \neq \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \qquad (5.17)$$

となり，ゲージ不変ではない．よって，光子の質量は 0 である．

- 光子場が荷電場の間で電磁相互作用を媒介する．
- 光子場はマクスウェル方程式に従う．
- 電磁場の強さ $F_{\mu\nu}$ はその成分として，電場 $\boldsymbol{E}$ や磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を含む ((4.58) 参照)．

まとめると，ゲージ原理は理論の構成に際し，**「相互作用を媒介するゲージ場とよばれる量子場の導入」**，**「物質場とゲージ場の間の相互作用の仕方の決定」**，**「ゲージ場の運動の仕方の決定」**という役割を果たす．

5.3 ヤン・ミルズ理論

1954 年に，ヤン（C. N. Yang）とミルズ（R. L. Mills）は**核子**（nucleon）の間にはたらく強い相互作用の形を決定するために，核子の間に近似的に成立する**アイソスピン対称性**に対してゲージ原理を採用した．その結果，**ヤン・ミルズ理論**（Yang-Mills theory），あるいは**非可換ゲージ理論**（non-abelian gauge theory）とよばれる理論の原型が導かれた．ここで，核子とは陽子と中性子の総称でいずれもスピン 1/2 のフェルミオンである．また，**アイソスピン**（isospin）とはスピンと同じ数学的な構造をもつ量子数で，陽子と中性子をアイソスピン空間とよばれる 2 次元内部空間のベクトル（アイソスピン 2 重項）

$$N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix} \qquad (5.18)$$

とする．ここで，$N(x)$ は**核子場**である．このようなアイソスピンの導入は，「電荷の違いを除いて陽子と中性子は共にスピンが 1/2 で質量もほぼ同じであるため，これらを異なる粒子と考えるより同一の粒子の異なる状態と考える方が自然である」という発想に基づく．実際に，原子核の世界で**核力**とよばれる核子を束縛する強い力のもとで陽子と中性子が同じように振る舞うことが知られている．すなわち，核力を記述する理論はアイソスピン空間内の回転のもとでの不変性（アイソスピン対称性）を有すると予想される．

前節の手順を参考にして，アイソスピン対称性に関するゲージ理論を構築しよう．出発点は自由な核子の運動を記述するラグランジアン密度

$$\mathscr{L}_{\mathrm{N}} = \overline{N}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{\mathrm{N}})N(x) \qquad (5.19)$$

である．ここで，簡単のために陽子と中性子は共通の質量 m_{N} をもつとした．$\mathscr{L}_{\mathrm{N}}$ は大局的 $SU(2)$ 変換

$$N(x) \to N'(x) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\alpha^a\frac{\tau^a}{2}\right)N(x) \tag{5.20}$$

のもとでの不変性を有する．ここで，α^a $(a=1,2,3)$ は実定数である．τ^a はパウリ行列で，スピンと区別するために σ^a の代わりに τ^a を用いた．

ゲージ原理を採用して，「$N(x)$ に関する局所的 $SU(2)$ 変換

$$N(x) \to N'(x) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\theta^a(x)\frac{\tau^a}{2}\right)N(x) \equiv U(x)N(x) \tag{5.21}$$

のもとで理論が不変になるべし」という要請を課す．ここで，$\theta^a(x)$ は任意の積分可能な実関数である．すると，以下のような手順に従ってヤン・ミルズ理論に関するラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ が導出される．

1. (5.21) のもとでの不変性を脅かす $\partial_\mu\theta^a(x)$ を含む項を消去するために，**ヤン・ミルズ場**，あるいは**非可換ゲージ場**とよばれるアイソスピン 3 重項を組む場 $A_\mu^a(x)$ $(a=1,2,3)$ を導入し，偏微分 ∂_μ を共変微分 $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{3}A_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2}$ に置き換える．すなわち，

$$\partial_\mu \ \Rightarrow\ D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{3}A_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2} \tag{5.22}$$

とする．ここで，g はゲージ結合定数である．

2. この置き換えにより，$\mathscr{L}_{\mathrm{N}}$ が

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{N}} = \overline{N}(x)\left\{i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{3}A_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2}\right) - m_{\mathrm{N}}\right\}N(x) \tag{5.23}$$

となり，核子場 $N(x)$ とヤン・ミルズ場 $A_\mu^a(x)$ の間の相互作用の形が決まる．

3. $D_\mu N(x)$ がゲージ変換のもとで，ゲージ共変性

$$D_\mu N(x) \to D'_\mu N'(x) = U(x)D_\mu N(x) \tag{5.24}$$

を有するという要請から，$A_\mu^a(x)$ に関するゲージ変換

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{3}A_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2} &\to \sum_{a=1}^{3}{A'}_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2}\\ &= U(x)\sum_{a=1}^{3}A_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2}U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)\end{aligned} \tag{5.25}$$

が導かれる．ここで，$(\partial_\mu U)U^{-1} = -U\partial_\mu U^{-1}$ を用いた（(A.276) 参照）．

4. 共変微分の間の交換関係

$$[D_\mu, D_\nu] = ig\sum_{a=1}^{3}F_{\mu\nu}^a(x)\frac{\tau^a}{2} \tag{5.26}$$

から導かれる

$$F^a_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) - g\sum_{b,c=1}^{3} \varepsilon^{abc} A^b_\mu(x) A^c_\nu(x) \qquad (5.27)$$

がヤン・ミルズ場の強さとして定義される．ここで，ε^{abc} は $SU(2)$ のリー代数の構造定数で 3 つの添字に関して完全反対称で $\varepsilon^{123} = 1$ である．$F^a_{\mu\nu}(x)$ は (5.25) のもとで，

$$\sum_{a=1}^{3} F^a_{\mu\nu}(x)\frac{\tau^a}{2} \to \sum_{a=1}^{3} F'^a_{\mu\nu}(x)\frac{\tau^a}{2} = U(x)\sum_{a=1}^{3} F^a_{\mu\nu}(x)\frac{\tau^a}{2}U^{-1}(x) \qquad (5.28)$$

のように変換する．

5. ヤン・ミルズ場は光子場を拡張した場であるから，ヤン・ミルズ場の運動項を記述するラグランジアン密度として，場を 2 次の形で，さらに偏微分も 2 次の形で含んだものがふさわしい．加えて，ローレンツ不変性とゲージ不変性を有する必要がある．このようなことから，運動項は $F^a_{\mu\nu}(x)$ の 2 次式で与えられると予想される．さらに (5.28) により，

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{a,b=1}^{3} F^a_{\mu\nu}\frac{\tau^a}{2}F^{b\mu\nu}\frac{\tau^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3} F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \qquad (5.29)$$

はゲージ不変である．ここで，tr はゲージ群の元に関するトレースを表し，$\mathrm{tr}\left(\frac{\tau^a}{2}\frac{\tau^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ を用いた．実際，$\mathrm{tr}(UFU^{-1}UGU^{-1}) = \mathrm{tr}(FU^{-1}UGU^{-1}U) = \mathrm{tr}(FG)$ を用いて，(5.29) のゲージ不変性が示される．よって，光子場を参考にして，ヤン・ミルズ場の運動項は

$$\mathscr{L}_{A^a} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \qquad (5.30)$$

で与えられる．こうして，ヤン・ミルズ場の運動項の形も決まる．

6. $\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{N}}$ と $\mathscr{L}_{A^a}$ を足し合わせることにより，ヤン・ミルズ理論のラグランジアン密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{YM}} &= \overline{N}(x)\left\{i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{3} A^a_\mu(x)\frac{\tau^a}{2}\right) - m_{\mathrm{N}}\right\}N(x)\\ &\quad -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} F^a_{\mu\nu}(x)F^{a\mu\nu}(x)\\ &= \overline{N}(x)i\partial\!\!\!/ N(x) - m_{\mathrm{N}}\overline{N}(x)N(x) - g\overline{N}(x)\sum_{a=1}^{3} A\!\!\!/^a\frac{\tau^a}{2}N(x)\\ &\quad -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} F^a_{\mu\nu}(x)F^{a\mu\nu}(x) \qquad (5.31)\end{aligned}$$

に到達する．ここで，$\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu$，$A\!\!\!/^a = \gamma^\mu A^a_\mu$ である．

ヤン・ミルズ場の特徴を確認しよう．

- 光子場の場合と同様に，ヤン・ミルズ場に関するあからさまな質量項はゲージ不変性により許されない．
- 光子場の場合と同様に，ヤン・ミルズ場が核子場の間で相互作用を媒介する．$\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ から核子場とヤン・ミルズ場の間の相互作用は

$$
\begin{aligned}
&-g\overline{N}(x)\gamma^{\mu}\sum_{a=1}^{3}\frac{\tau^a}{2}N(x)A_{\mu}^{a}(x)\\
&\quad=-\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{p}(x)\gamma^{\mu}n(x)A_{\mu}^{+}(x)+\overline{n}(x)\gamma^{\mu}p(x)A_{\mu}^{-}(x)\right)\\
&\qquad-\frac{g}{2}\left(\overline{p}(x)\gamma^{\mu}p(x)A_{\mu}^{0}(x)-\overline{n}(x)\gamma^{\mu}n(x)A_{\mu}^{0}(x)\right)
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

と表される．ここで，$A_{\mu}^{\pm}(x)\equiv(A_{\mu}^{1}(x)\mp iA_{\mu}^{2}(x))/\sqrt{2}$ および $A_{\mu}^{0}(x)\equiv A_{\mu}^{3}(x)$ である．電荷の保存則を要請すると，$A_{\mu}^{+}(x)$，$A_{\mu}^{-}(x)$，$A_{\mu}^{0}(x)$ の電荷 (Q) はそれぞれ 1，−1，0 となる．$S_{\mathrm{YM}}=\displaystyle\int\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}d^4x$ に対して，$\overline{N}(x)$ に関する変分より核子場に関する波動方程式

$$
\left\{i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+ig\sum_{a=1}^{3}A_{\mu}^{a}(x)\frac{\tau^a}{2}\right)-m_{\mathrm{N}}\right\}N(x)=0 \tag{5.33}
$$

が導かれる．

- S_{YM} に対して，$A_{\mu}^{a}(x)$ に関する変分より**ヤン・ミルズ方程式**とよばれるヤン・ミルズ場に関する波動方程式

$$
\partial_{\mu}F^{a\mu\nu}(x)-g\sum_{b,c=1}^{3}\varepsilon^{abc}A_{\mu}^{b}(x)F^{c\mu\nu}(x)=g\overline{N}(x)\gamma^{\nu}\frac{\tau^a}{2}N(x) \tag{5.34}
$$

が導かれる．ここで，右辺に現れるカレント $J^{a\nu}(x)=\overline{N}(x)\gamma^{\nu}\dfrac{\tau^a}{2}N(x)$ は $(D_{\nu}J^{\nu})^a\equiv\partial_{\nu}J^{a\nu}-g\displaystyle\sum_{b,c=1}^{3}\varepsilon^{abc}A_{\nu}^{b}J^{c\nu}=0$ を満たすため保存カレントではない．(5.34) の左辺の第 2 項を右辺に移項することにより，保存カレント

$$
j^{a\nu}(x)\equiv\overline{N}(x)\gamma^{\nu}\frac{\tau^a}{2}N(x)+\sum_{b,c=1}^{3}\varepsilon^{abc}A_{\mu}^{b}(x)F^{c\mu\nu}(x) \tag{5.35}
$$

を得られる．実際，$\partial_{\mu}F^{a\mu\nu}(x)=j^{a\nu}(x)$ に対して，$F^{a\mu\nu}(x)=-F^{a\nu\mu}(x)$ に起因する関係式 $\partial_{\nu}\partial_{\mu}F^{a\mu\nu}(x)=0$ から保存則 $\partial_{\nu}j^{a\nu}(x)=0$ が成り立つことがわかる．$j^{a\nu}(x)$ は大局的 $SU(2)$ 変換に関するネーターカレントで，(5.35) の右辺の第 2 項はヤン・ミルズ場がアイソスピン 1 をもつことに由来する．

- ヤン・ミルズ場自身がアイソスピンをもち，

$$\mathscr{L}_{\text{self}} = \frac{g}{2}\sum_{a,b,c=1}^{3}\varepsilon^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)A^{b\mu}A^{c\nu}$$
$$-\frac{g^2}{4}\sum_{a,b,c,d,e=1}^{3}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu}A^{e\nu} \tag{5.36}$$

に従って自己相互作用を行う．

ヤンとミルズの理論が実現しているならば，スピン 1 でアイソスピン 1 をもつ質量 0 の粒子が存在するはずであるが，そのような粒子は見つかっていないため，このままでは核力の理論として機能しない．

5.4 ゲージ場の一般論

前節でアイソスピン対称性（$SU(2)$ 変換）に関するゲージ理論を考察した．ここで，次のような疑問が湧いてくる．

疑問 1. 一般的な変換に関するゲージ理論はどのような理論なのか？
疑問 2. ローレンツ変換にゲージ原理を適用するとどうなるのか？

ヤンとミルズの研究とは独立になされた内山（R. Utiyama）のゲージ場の一般論の中にこれらの回答が存在する（文献 [16] 参照）．疑問 2 については，局所的ローレンツ変換のもとでの不変性を要請することにより重力を含む理論が得られることが知られている．すなわち，アインシュタインの一般相対性理論がゲージ理論の観点から理解される．ここでは疑問 1 に対する回答について紹介する．

物質場 $\Psi(x)$ がリー群 (Lie group) G に関する $\boldsymbol{r}$ 重項（$\boldsymbol{r}$ と表記する）を組んでいるとする．G の要素は一般に $\exp\left(i\sum_{a=1}^{n}\theta^a T^a\right)$ と書かれる．ここで，θ^a は実定数で，$a = 1, 2, \cdots, n$ （$n = \dim G$: G の次元）である．また，T^a は G の生成子（リー代数，またはリー環の元）で交換関係

$$[T^a, T^b] = i\sum_{c=1}^{n} f^{abc}T^c \tag{5.37}$$

を満たす．ここで，f^{abc} はリー代数の構造定数である（A.7.2 項参照）．

自由な物質場に関する理論を出発点として，G に基づく対称性に対してゲージ原理を採用しよう．すなわち，局所的変換

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{n}\theta^a(x)T^a(\boldsymbol{r})\right)\Psi(x) \equiv U(x)\Psi(x) \tag{5.38}$$

のもとで不変な理論を構築しよう．ここで，$\theta^a(x)$ は任意の積分可能な実関数，$T^a(\boldsymbol{r})$ は (5.37) を満たす $\boldsymbol{r}$ 次元表現の表現行列（$r \times r$ 行列）である．

まず，G の次元と同じ数の成分をもつ非可換ゲージ場 $A_\mu^a(x)$ を導入して，偏微分 ∂_μ を共変微分 $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a(\boldsymbol{r})$ に置き換えることにより，物質場と非可換ゲージ場の間の相互作用の形が決まる．ここで，g はゲージ結合定数である．物質場に関する共変微分 $D_\mu\Psi(x)$ がゲージ変換 (5.38) のもとで共変に変換する（$D_\mu\Psi(x) \to D'_\mu\Psi'(x) = U(x)D_\mu\Psi(x)$）という要請により，ゲージ場に関するゲージ変換が

$$\sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a(\boldsymbol{r}) \to \sum_{a=1}^{n} A'^a_\mu(x)T^a(\boldsymbol{r})$$
$$= U(x)\sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a(\boldsymbol{r})U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{5.39}$$

のように決まる．

共変微分に関する交換関係 $[D_\mu, D_\nu] = ig\sum_{a=1}^{n} F_{\mu\nu}^a(x)T^a(\boldsymbol{r})$ から導かれる

$$F_{\mu\nu}^a(x) \equiv \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g\sum_{b,c=1}^{n} f^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \tag{5.40}$$

が**ゲージ場の強さ**として定義される．$F_{\mu\nu}^a(x)$ は (5.39) のもとで，

$$\sum_{a=1}^{n} F_{\mu\nu}^a(x)T^a(\boldsymbol{r}) \to \sum_{a=1}^{n} F'^a_{\mu\nu}(x)T^a(\boldsymbol{r})$$
$$= U(x)\sum_{a=1}^{n} F_{\mu\nu}^a(x)T^a(\boldsymbol{r})U^{-1}(x) \tag{5.41}$$

のように変換する．さらに，ローレンツ不変性とゲージ不変性より，非可換ゲージ場の運動項は

$$\mathscr{L}_{A^a} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{n} F_{\mu\nu}^a(x)F^{a\mu\nu}(x) \tag{5.42}$$

で与えられる．ゲージ場に関する質量項はゲージ不変性からあからさまな形では存在しない．ちなみに，(5.38)，(5.39) に関する無限小変換はそれぞれ

$$\delta\Psi(x) = i\sum_{a=1}^{n} \varepsilon^a(x)T^a(\boldsymbol{r})\Psi(x), \tag{5.43}$$

$$\delta A_\mu^a(x) = -\sum_{b,c=1}^{n} f^{abc}\varepsilon^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\varepsilon^a(x) \tag{5.44}$$

で与えられる．ここで，$\varepsilon^a(x)$ は無限小の実関数である．ゲージ理論に関する幾何学については A.8 節を参照しよう．

5.5 振り返りと見通し

第 4 章に引き続き,

- ゲージ結合定数とは何か?
- ゲージ場(ゲージ粒子),ゲージ場の強さとは何か?
- なぜ,ゲージ場を扱うのか?
- ゲージ場が従う方程式はどんな形をしているのか?

という疑問を頭の片隅に置きながら,量子電磁力学を拡張したゲージ理論とよばれる理論を紹介した.ゲージ理論に基づいて,以下のような回答が与えられる.

- ゲージ結合定数とは物質場とゲージ場の間の相互作用の強さを表す定数である.
- ゲージ場はゲージ相互作用を媒介する役割を果たす.ゲージ場の強さとはゲージ場から構成される 2 階反対称テンソル場で,光子場の場合はその成分として電場や磁束密度を含む.
- ゲージ原理を採用することにより,物質場とゲージ場の間の相互作用の形が決まるという特徴がある.
- 光子場はマクスウェル方程式に従い,非可換ゲージ場はヤン・ミルズ方程式に従う.

量子電磁力学の数式

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = \overline{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - m\overline{\psi}\psi - eQ\overline{\psi} A\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{5.45}$$

およびヤン・ミルズ理論の数式

$$\mathscr{L}_{\mathrm{YM}} = \overline{N} i \partial\!\!\!/ N - m_{\mathrm{N}}\overline{N}N - g\overline{N}\sum_{a=1}^{3} A\!\!\!/^{a}\frac{\tau^{a}}{2}N - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{5.46}$$

と素粒子の標準数式 (1.1) を見比べると,3 種類のゲージ場 B_μ, W_μ, G_μ の存在が予想される.ゲージ場の強さはそれぞれ $B_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$ のようにゲージ場と同じラテン文字を使用していると思われる.添字が(μ と $\mu\nu$ のように)異なるので両者を混同することはないだろう.「これらのゲージ場がどのような物質場とどのような形で相互作用をするのか?」を明らかにするのが次の課題である.残りの 3 章でこの課題に挑む.

第 6 章
弱い相互作用の理論

物質粒子にはたらく相互作用に着目して，物質粒子の特質を探る．弱い相互作用を記述するゲージ理論の構成とヒグス粒子に関する問いかけ「ϕ（ヒグス場）とは何か？」，「なぜ，扱うのか？」に答えることを目標とする．

6.1　物質粒子のプロフィール

(1.1) の 5 行目をみると，物質粒子を表す ψ の右下に j という文字が添えられている．これは物質粒子を区別するための添字と考えられる．すなわち，物質粒子は複数存在し，1 行目から 4 行目まではそのことが省略されていて，$\overline{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi$ は $\sum_j \overline{\psi}_j i \partial\!\!\!/ \psi_j$，$g_1 \overline{\psi} B\!\!\!/ \psi$ は $\sum_j g_1 \overline{\psi}_j B\!\!\!/ \psi_j$，$g_2 \overline{\psi} W\!\!\!\!/ \psi$ は $\sum_j g_2 \overline{\psi}_j W\!\!\!\!/ \psi_j$，$g_3 \overline{\psi} G\!\!\!/ \psi$ は $\sum_j g_3 \overline{\psi}_j G\!\!\!/ \psi_j$ を表していると考えられる．よって，(1.1) は

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \; & \sum_j \overline{\psi}_j i \partial\!\!\!/ \psi_j \\ & - \sum_j g_1 \overline{\psi}_j B\!\!\!/ \psi_j - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & - \sum_j g_2 \overline{\psi}_j W\!\!\!\!/ \psi_j - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \\ & - \sum_j g_3 \overline{\psi}_j G\!\!\!/ \psi_j - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \\ & + \sum_{i,j} \overline{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + \text{h.c.} \\ & + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \end{aligned} \tag{6.1}$$

と表される．

以下で次のような課題に取り組もう．

- ψ_j を具体的に洗い出す．
- ψ_j のゲージ量子数を特定する．

ここで，**ゲージ量子数**とはゲージ相互作用のもとでの粒子の特性を表す数，あるいは数の組で，電磁相互作用の場合は素電荷 e を単位とした電荷 Q の値，非可換なゲージ相互作用の場合は表現行列 T^a の対角型のもの（カルタン部分代数）の固有値，あるいは表現（多重項）のことである．**ゲージ量子数とゲージ変換の間には 1 対 1 の対応関係が存在するので，ゲージ群とそのもとでの物質粒子のゲージ量子数が明らかになれば，ゲージ原理をもとにして物質粒子とゲージ場の間の相互作用の形が決定される．**逆に，実験データから得られた相互作用の特徴をもとにしてゲージ群を絞り込むこともできる．この節では物質粒子にはたらく相互作用に基づいて，物質粒子のプロフィールを解き明かす．

この先，様々な粒子が唐突(とうとつ)に登場して，初学者の中には混乱をきたす方が出てくると思う．そのような方はまずは，

- 物質粒子 ψ_j はレプトンとクォークからなる．
- ψ_j は表 6.3 と表 6.4 のような量子数をもつ．
- ψ_j のゲージ量子数については 6.3 節および 7.1 節で考察する．

だけ頭にインプットして，6.2 節に移ればよいと思う．物質粒子のプロフィールの解明に興味が湧いたら，のちほどこの節に戻ってくればよいだろう．

物質粒子の間には重力のほかに 3 種類の相互作用（電磁相互作用，弱い相互作用，‘強い’相互作用）がはたらくことが知られている．ここで，弱い相互作用とは β 崩壊を典型例とする原子核や素粒子の崩壊をつかさどる相互作用である．また，‘強い’相互作用とは核子（陽子，中性子）を束縛し原子核を構成する核力を典型例とする相互作用である．「強い」をコーテーションで囲んだのは第 7 章で登場するクォークの間にはたらく強い相互作用とよばれる相互作用と区別するためである．ちなみに，核力を媒介する粒子は（第 5 章で考察したアイソスピンに関するゲージ粒子ではなく）湯川（H. Yukawa）により提唱された π **中間子**とよばれる擬スカラー粒子である．

さて，弱い相互作用による崩壊過程として，例えば，

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e, \quad \mu^- \to \nu_\mu + e^- + \overline{\nu}_e, \quad \Lambda^0 \to p + \mu^- + \overline{\nu}_\mu, \tag{6.2}$$

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu, \tag{6.3}$$

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^0, \quad K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, \quad K^0 \to \pi^+ + \pi^- \tag{6.4}$$

が挙げられる．(6.2) の 1 番目は中性子（n）の β 崩壊，2 番目はミューオン（または μ 粒子）（μ^-）とよばれる粒子の崩壊，3 番目は Λ 粒子（Λ^0）とよばれる粒子の崩壊を表す．(6.3) は電荷をもった π 中間子（$\pi^\pm$）の崩壊を表す．(6.4) は K 中間子（K^+，K^0）とよばれる粒子の崩壊を表す．$\overline{\nu}_e$ は反電子ニュートリノ，ν_μ はミューオンニュートリノ，$\overline{\nu}_\mu$ は反ミューオンニュートリノで，いずれも電荷をもたず質量はほぼ 0 である．また，μ^+ は反ミューオンとよばれるミューオンの反粒子，π^0 は電荷をもたない（中性の）π 中間子である．これ

らの過程を記述する相互作用の結合定数の大きさはほぼ同じくらいの値を取るため，弱い相互作用が**普遍性**をもっていて，電磁相互作用のようにゲージ理論として定式化されると予想される．

核子に π 中間子を衝突させることにより，様々な新粒子が生成される．新粒子生成の例として，

$$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0 \tag{6.5}$$

が挙げられる．このような生成過程から‘強い’相互作用の結合定数の大きさを見積もることができて，弱い相互作用の結合定数よりも 5 ～ 6 けた大きいことが知られている．

まずは‘強い’相互作用に基づいて粒子を分類しよう．‘強い’相互作用を感じる粒子は**ハドロン**（hadron）とよばれ，p，n，Λ^0，$\pi^\pm$，π^0，K^+，K^0 など非常にたくさん存在する．‘強い’相互作用を感じない物質粒子は**レプトン**（lepton）とよばれ，e^-，ν_e，μ^-，ν_μ などがある．さらにハドロンはスピンにより 2 種類に分類される．整数スピンをもつハドロンは**メソン**（meson）とよばれ，半奇数スピンをもつハドロンは**バリオン**（baryon）とよばれる．

K^0 や Λ^0 の寿命の観測値から，これらの粒子は‘強い’相互作用ではなく弱い相互作用により崩壊すると考えられる．参考までに，‘強い’相互作用により自然崩壊するハドロンの寿命は 10^{-23} s ほどである．今，仮に弱い相互作用のスイッチを切ったとしよう．すると，K^0 や Λ^0 は安定に存在すると考えられる．安定性の理由を保存則に求めるのは自然な発想である．例えば，電子が自然崩壊しない理由として，「電子は電荷をもつ最も軽い粒子であり，エネルギーの保存則および電荷の保存則が厳密に成立するため単独の状態で安定に存在する」と考えられる．このような理由付けを用いて，K^0 や Λ^0 の安定性を説明するために，新たな量子数として**ストレンジネス（奇妙さ）**（strangeness）とよばれ S と表記される量を導入する．S は弱い相互作用のもとでは保存されないため，近似的保存量である．一方，S は‘強い’相互作用と電磁相互作用のもとでは保存し，

$$S(K^0) = -S(\Lambda^0) = 1, \quad S(\pi^\pm) = S(\pi^0) = S(p) = S(n) = 0 \tag{6.6}$$

と指定する．S の導入により，π 中間子と核子の散乱に伴い，‘強い’相互作用を通して S が 0 でない新粒子が対生成する．そのうち S が 0 でない軽い粒子は，S の保存則を破るような弱い相互作用を通して崩壊するため寿命が比較的長いことがわかる．

近似的なものを含む保存量は反応に関する選択則を与えるため，極めて重要である．‘強い’相互作用に対して，連続変換に関する保存量として，電荷（Q），アイソスピン（I），バリオン数（B），ストレンジネス（S）が存在する．Q，B，S に関する変換群は $U(1)$ で，I に関する変換群は $SU(2)$ である．保

存量は変換群の生成子となる．核子はアイソスピンの 2 重項であるが，p と n で電荷の値は異なる．このことから Q と I は独立ではないことがわかる．具体的には，$SU(2)$ の生成子を I_a （$a = 1, 2, 3$）として，核子に対して，

$$I_a = \frac{\tau^a}{2}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

であるため，$[Q, I_1] \neq 0$，$[Q, I_2] \neq 0$ となり $e^{i\theta Q}$ と $\exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\theta^a I_a\right)$ は可換ではない．互いに可換な生成子の組は $\{Q, I_3, B, S\}$ である．ここで，I_3 はアイソスピンの第 3 成分である．参考までに，スピン 0 のメソンおよびスピン 1/2 のバリオンに対して，4 種類の物理量 Q，I_3，B，S および**超電荷**（**ハイパーチャージ**）（hypercharge）とよばれる物理量 $Y \equiv B + S$ の値を表 6.1 と表 6.2 に挙げる．質量の似通っている粒子ごとにアイソスピンに関する多重項を組んでいる．自然単位系に基づき，質量は MeV/c^2 の代わりに MeV と記載した．寿命に関しては秒（s），あるいは年を用いて表記した．質量と寿命の実験誤差を省略している．K^0_S や K^0_L は K^0 と $\overline{K}^0$ の線形結合により構成される粒子である（8.2.2 を参照）．

表 6.1　スピン 0 のメソンの量子数，質量，寿命．

粒子名	I_3	B	S	Y	Q	質量（MeV）	寿命（s）
π^+	1	0	0	0	1	139.57018	2.6033×10^{-8} s
π^0	0	0	0	0	0	134.9766	8.52×10^{-17} s
π^-	-1	0	0	0	-1	139.57018	2.6033×10^{-8} s
K^+	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	493.677	1.2380×10^{-8} s
K^0	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0	497.611	$\tau(K^0_S) = 0.8954 \times 10^{-10}$ s
$\overline{K}^0$	$\frac{1}{2}$	0	-1	-1	0	497.611	$\tau(K^0_L) = 5.116 \times 10^{-8}$ s
K^-	$-\frac{1}{2}$	0	-1	-1	-1	493.677	1.2380×10^{-8} s
η	0	0	0	0	0	547.862	5.02×10^{-19} s
η'	0	0	0	0	0	957.78	3.34×10^{-21} s

‘強い’相互作用における保存量 Q，I_3，B，S の間に，

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \tag{6.8}$$

が成立する．この関係式は**中野・西島・ゲルマンの法則**とよばれ，現在までに発見されているハドロンはすべてこの法則に従っている．素朴な疑問として，「すべてのハドロンが中野・西島・ゲルマンの法則に従うのはなぜか？」が湧いてくる．この問いかけに対する一つの回答として，「中野・西島・ゲルマンの法則に従う保存量を担う，似通った質量をもつ基本粒子が少数存在し，（残りの）ハドロンは，基本粒子から構成された複合粒子である」が考えられる．基本粒

表 6.2 スピン 1/2 のバリオンの量子数，質量，寿命．

粒子名	I_3	B	S	Y	Q	質量（MeV）	寿命（s，あるいは年）
p	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1	938.272081	$> 10^{33}$年
n	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	939.565413	880.2 s
Λ^0	0	1	-1	0	0	1115.683	2.632×10^{-10} s
Σ^+	1	1	-1	0	1	1189.37	0.8018×10^{-10} s
Σ^0	0	1	-1	0	0	1192.642	7.4×10^{-20} s
Σ^-	-1	1	-1	0	-1	1197.449	1.479×10^{-10} s
Ξ^0	$\frac{1}{2}$	1	-2	-1	0	1314.86	2.90×10^{-10} s
Ξ^-	$-\frac{1}{2}$	1	-2	-1	-1	1321.71	1.639×10^{-10} s

子として，既知の粒子 p, n, Λ^0 およびその反粒子 $\overline{p}$, $\overline{n}$, $\overline{\Lambda}^0$ を用いた模型が**坂田模型**である．また，クォークと名付けられた新粒子を用いた模型が**クォーク模型**である．現在では，クォーク模型が実験により支持されているため，クォーク模型について紹介する．

1964 年，ゲルマン（M. Gell-Mann）とツヴァイク（G. Zweig）は独立に，ハドロンを構成する基本粒子として，スピンが 1/2 で $SU(3)$ の 3 重項に属する粒子を導入した．以下，ゲルマンの命名に従い**クォーク**（quark）というよび名を用いることにする．3 重項 q_f（$f = 1, 2, 3$）を組むクォークはアップクォーク，ダウンクォーク，ストレンジクォークとよばれ，それぞれ u, d, s と表記される．このような f で指定される量子数は**香り**（**フレーバー**）（flavor）とよばれる．クォーク模型において，メソン（$M_{ff'}$）は $SU(3)$ の $\mathbf{3}$ 表現に従うクォーク（q_f）と $\mathbf{3}^*$ 表現に従う反クォーク（$\overline{q}_f$）から構成され，バリオン（$B_{ff'f''}$）は 3 個のクォークから構成され，

$$M_{ff'} = q_f \overline{q}_{f'}, \quad B_{ff'f''} = q_f q_{f'} q_{f''} \tag{6.9}$$

のように表される（この式は 7.1 節で (7.4) のように修正される）．クォークが共通のバリオン数をもつとすると $B = 1/3$ である．また，クォークが中野・西島・ゲルマンの法則に従うとすると，q_f の電荷は表 6.3 のように決まる．**クォークが分数の電荷をもっていることに留意しよう．**

表 6.1，表 6.3，(6.9) を用いて，スピン 0 のメソンが

表 6.3 クォークおよび反クォークの量子数．

名称	スピン	I_3	B	S	Q	名称	スピン	I_3	B	S	Q
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\overline{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\overline{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\overline{s}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

$$\pi^+ = u\overline{d}, \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\overline{u} - d\overline{d}\right), \quad \pi^- = d\overline{u},$$
$$K^+ = u\overline{s}, \quad K^0 = d\overline{s}, \quad \overline{K}^0 = s\overline{d}, \quad K^- = s\overline{u},$$
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(u\overline{u} + d\overline{d} - 2s\overline{s}\right), \quad \eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\overline{u} + d\overline{d} + s\overline{s}\right) \tag{6.10}$$

のようにクォークから構成されることがわかる．

また，表 6.2，表 6.3，(6.9) を用いて，スピン 1/2 のバリオンが

$$p = uud, \quad n = udd, \quad \Lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)s,$$
$$\Sigma^+ = uus, \quad \Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)s, \quad \Sigma^- = dds,$$
$$\Xi^0 = uss, \quad \Xi^- = dss \tag{6.11}$$

のようにクォークから構成されることがわかる．

参考までに，レプトンおよび反レプトンに関する量子数を表 6.4 に挙げる．ここで，L はレプトン数とよばれる量子数である．レプトンはアイソスピン (I)，バリオン数 (B)，ストレンジネス (S) をもたない（すべて 0 である）．

表 6.4　レプトンおよび反レプトンの量子数．

名称	スピン	L	Q	名称	スピン	L	Q
e^-	$\frac{1}{2}$	1	−1	e^+	$\frac{1}{2}$	−1	1
ν_e	$\frac{1}{2}$	1	0	$\overline{\nu}_e$	$\frac{1}{2}$	−1	0
μ^-	$\frac{1}{2}$	1	−1	μ^+	$\frac{1}{2}$	−1	1
ν_μ	$\frac{1}{2}$	1	0	$\overline{\nu}_\mu$	$\frac{1}{2}$	−1	0

このようにして，素粒子の標準数式に現れる ψ_j の候補としてレプトンとクォークが浮かび上がる．現在では，さらにチャームクォーク (c)，ボトムクォーク (b)，トップクォーク (t) とよばれるクォーク，タウオン（またはタウ粒子）(τ^-)，タウニュートリノ (ν_τ) とよばれるレプトンの存在が確認されている（第 8 章参照）．

6.2 弱い相互作用

6.2.1 パリティの非保存

β 崩壊を電子のスピンまで含めて詳しく調べると，パリティの非保存が明らかになる．具体例として，原子核のスピン $\boldsymbol{S}_\mathrm{A}$ に対して角度 θ の方向に放出される β 線（電子）の分布を測る実験について考察する（図 6.1 参照）．電子の運動量を $\boldsymbol{p}_\mathrm{e}$ とすると，電子の角分布 W は $\boldsymbol{S}_\mathrm{A} \cdot \boldsymbol{p}_\mathrm{e}$ の関数として与えられる．空間反転 $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ のもとで，スピンは $\boldsymbol{S}_\mathrm{A} \to \boldsymbol{S}_\mathrm{A}$，運動量は $\boldsymbol{p}_\mathrm{e} \to -\boldsymbol{p}_\mathrm{e}$ のよう

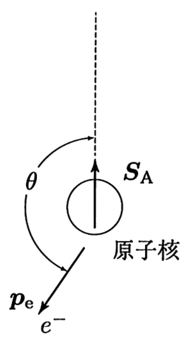


図 6.1　角度 θ の方向に放出される電子.

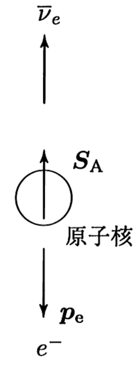


図 6.2　^{60}Co による β 崩壊.

に変換するので，$\boldsymbol{S}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}$ は空間反転のもとで符号を変える．スピンは角運動量の一種で軌道角運動量 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が軸性ベクトルであることを思い出そう．よって，W が $\boldsymbol{S}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}$ に関する奇数べきを含む場合，空間反転（パリティ変換）に関する対称性の壊れ（パリティの保存則の破れ）を意味する．

実際，リー（T. D. Lee）とヤン（C. N. Yang）の提案に基づき，1957 年にウー（C. S. Wu）らが，^{60}Co による β 崩壊（$^{60}_{27}\mathrm{Co} \to ^{60}_{28}\mathrm{Ni} + e^- + \overline{\nu}_e$）を用いて角分布の非対称性を確認した．具体的には，電子が ^{60}Co のスピンの向きと反対の向きに放出されることがわかり，パリティの非保存が実証された（図 6.2 参照）．

さらに，陽子は $p = uud$，中性子は $n = udd$ のようにクォークから構成されている．これらの結果を合わせて，β 崩壊に関する相互作用ラグランジアン密度は，クォークとレプトンを用いて，

$$\mathscr{L}_\beta = -G_\beta \overline{u}(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)d(x)\ \overline{e}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e(x) + \mathrm{h.c.} \qquad (6.12)$$

と表される．ここで，h.c. はエルミート共役を表す．実際，**場の量子論に基づき，$d(x)$ を d の消滅演算子，$\overline{u}(x)$ を u の生成演算子，$\overline{e}(x)$ を e^- の生成演算子，$\nu_e(x)$ を $\overline{\nu}_e$ の生成演算子とすれば，β 崩壊が記述されることがわかる．**

以下で，$(1-\gamma_5)$ という因子の存在がパリティの非保存と関係することを説明する．カイラル表示 (4.114) を用いて，質量 m の自由粒子に関するディラック方程式は

$$i\hbar\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x) - mc\eta^*(x) = 0, \quad i\hbar\sigma^\mu\partial_\mu\eta^*(x) - mc\xi(x) = 0 \qquad (6.13)$$

と表される．ここで，$\xi(x)$，$\eta^*(x)$ はそれぞれディラックスピノルにおける上の 2 成分，下の 2 成分である．(6.13) からわかるように，質量が 0 の場合，$\xi(x)$ と $\eta^*(x)$ は独立に振る舞い，**ワイルフェルミオン**（Weyl fermion）とよばれ，それぞれ次のような**ワイル方程式**とよばれる波動方程式に従う．

$$i\hbar\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x) = 0, \quad i\hbar\sigma^\mu\partial_\mu\eta^*(x) = 0. \qquad (6.14)$$

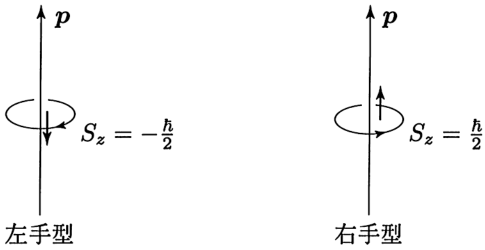


図 6.3　左手型と右手型.

ワイルフェルミオンは**ヘリシティ演算子**（helicity operator）とよばれる

$$\hat{\lambda} \equiv \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \quad (\boldsymbol{S}：スピン,\ \boldsymbol{p}：運動量) \tag{6.15}$$

で定義される演算子の固有状態で，その固有値はそれぞれ $-\frac{\hbar}{2}$，$\frac{\hbar}{2}$ である．このことは，(6.14) に対して $\boldsymbol{S} = \hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ と $p_0 = |\boldsymbol{p}|$ を用いて，それぞれ

$$i\hbar\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} \quad \Rightarrow \quad \overline{\sigma}^{\mu}p_{\mu} = p_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} = \tfrac{2p_0}{\hbar}\left(\tfrac{\hbar}{2} + \tfrac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\right), \tag{6.16}$$

$$i\hbar\sigma^{\mu}\partial_{\mu} \quad \Rightarrow \quad \sigma^{\mu}p_{\mu} = p_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} = \tfrac{2p_0}{\hbar}\left(\tfrac{\hbar}{2} - \tfrac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\right) \tag{6.17}$$

から理解できる．$\xi(x)$ の状態はスピンの向きと運動の向きが反平行であることを意味し，**左手型（left-handed）の状態**とよばれる．一方，$\eta^*(x)$ の状態はスピンの向きと運動の向きが平行であり，**右手型（right-handed）の状態**とよばれる（図 6.3 参照）．例えば，スピンの第 3 成分 S_z の固有値が $-\frac{\hbar}{2}$，$\frac{\hbar}{2}$ を取ることを思い出そう．さらに，質量 0 の粒子は真空中を光の速さで移動するため，ローレンツブーストにより，その粒子の移動する向きが逆転して見えるような座標系に移ることはできない．すなわち，**ワイルフェルミオンのヘリシティは本義ローレンツ変換のもとで不変である**．また，空間反転を行うとスピンの向きは変化しないが運動の向きは逆になるので，左手型の状態が右手型の状態に，右手型の状態が左手型の状態に変換される．よって，**ワイルフェルミオンが単独で存在する場合，空間反転のもとでの不変性が成立しない．**

$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ は**カイラリティ演算子** (chirality operator) とよばれ，カイラル表示において，γ_5 および空間反転のユニタリー行列 P はそれぞれ

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad P = e^{i\theta_{\mathrm{P}}}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

で与えられる．γ_5 の固有状態は

$$\psi_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^*(x) \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

で，それぞれ固有値 -1，1 をもつ．**質量 0 の粒子に関しては，ヘリシティの固**

有状態とカイラリティの固有状態は同一である．すなわち，ワイルフェルミオンは γ_5 の固有状態である．また，(6.18) の P より空間反転のもとで，ψ_L が ψ_R に，ψ_R が ψ_L に変換されるため，たとえ理論が ψ_L と ψ_R を含んでいたとしても，相互作用ラグランジアン密度が ψ_L と ψ_R の入れ換えのもとで不変でない場合，空間反転のもとでの不変性が成立しない．すなわち，パリティの非保存は ψ_L と ψ_R の間で弱い相互作用の仕方が異なることが原因であると考えられる．実際に，γ_5 の固有状態を用いて，(6.12) は

$$\mathscr{L}_\beta = -4G_\beta \overline{u}_L(x)\gamma^\mu d_L(x)\ \overline{e}_L(x)\gamma_\mu \nu_{eL}(x) + \text{h.c.} \tag{6.20}$$

と書き換えられ，β 崩壊に関与する粒子は左手型の成分のみで，パリティが最大限に破れていることがわかる．書き換えに際し，以下の公式を用いた．

$$\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1-\gamma_5}{2}, \quad \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1+\gamma_5}{2}, \tag{6.21}$$

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1+\gamma_5}{2}\frac{1-\gamma_5}{2} = 0, \tag{6.22}$$

$$\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu, \quad \gamma^\mu\frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1-\gamma_5}{2}\gamma^\mu, \tag{6.23}$$

$$\overline{\psi}_L \equiv \overline{\psi}\frac{1+\gamma_5}{2} = (0, \xi^*(x)), \quad \overline{\psi}_R \equiv \overline{\psi}\frac{1-\gamma_5}{2} = (\eta(x), 0). \tag{6.24}$$

6.2.2 弱い相互作用の有効理論

クォークとレプトンを用いて，中性子（n）の β 崩壊，ミューオン（μ^-）の崩壊，Λ 粒子（Λ^0）の崩壊はそれぞれ

$$d \to u + e^- + \overline{\nu}_e, \quad \mu^- \to \nu_\mu + e^- + \overline{\nu}_e, \quad s \to u + \mu^- + \overline{\nu}_\mu \tag{6.25}$$

と表される．ここで，$\Lambda^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)s$ を用いた．弱い相互作用の普遍性，パリティの非保存，クォーク模型を考慮して，上記の崩壊過程を記述する相互作用ラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_\beta = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} a\overline{u}(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)d(x)\ \overline{e}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e(x) + \text{h.c.}, \tag{6.26}$$

$$\mathscr{L}_\mu = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \overline{\nu}_\mu(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\mu(x)\ \overline{e}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e(x) + \text{h.c.}, \tag{6.27}$$

$$\mathscr{L}_\Lambda = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} b\overline{u}(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)s(x)\ \overline{\mu}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu(x) + \text{h.c.} \tag{6.28}$$

と表される．ここで，G_F はフェルミ結合定数で，その値は $G_F \doteqdot 1.1663787 \times 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}$ である．また，$a \doteqdot 0.975$，$b \doteqdot 0.22$ で，これらは実験データと弱い相互作用の普遍性に関する仮説「弱い相互作用を記述する結合定数は G_F のみである」に基づいて導入された定数である．

弱い相互作用の普遍性に関する仮説に基づく崩壊過程の統一的な理解に向けて，$\mathscr{L}_\beta$，$\mathscr{L}_\mu$，$\mathscr{L}_\Lambda$ を含む包括的なラグランジアン密度として，

$$\mathscr{L}_{V-A} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger(x) J^\mu(x) \tag{6.29}$$

が存在する．ここで，$J^\mu(x)$ は荷電カレントで，

$$J^\mu(x) = J_{(q)}^\mu(x) + J_{(l)}^\mu(x), \tag{6.30}$$

$$J_{(q)}^\mu \equiv a\overline{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d + b\overline{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s, \tag{6.31}$$

$$J_{(l)}^\mu \equiv \overline{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)e + \overline{\nu}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma_5)\mu \tag{6.32}$$

で定義される．

$a^2 + b^2 \doteqdot 1$ であることから，$a = \cos\theta_{\mathrm{C}}$, $b = \sin\theta_{\mathrm{C}}$ のように表示しよう．ここで，$\theta_{\mathrm{C}} \doteqdot 12.8°$ は**カビボ角**（Cabibbo's angle）とよばれる（d と s の混合を表す）混合角である．クォーク場の再定義 $d' \equiv d\cos\theta_{\mathrm{C}} + s\sin\theta_{\mathrm{C}}$ により，$J_{(q)}^\mu$ は

$$J_{(q)}^\mu = \overline{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d' \tag{6.33}$$

のように書き換えられる．さらに，チャームクォーク（c）の導入により，

$$J_{(q)}^\mu = \overline{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d' + \overline{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s', \tag{6.34}$$

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathrm{C}} & \sin\theta_{\mathrm{C}} \\ -\sin\theta_{\mathrm{C}} & \cos\theta_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

のように修正される．ここで，(6.35) に現れる 2×2 直交行列は**カビボ行列**とよばれる 2 世代のクォーク間の混合を表す行列である．3 世代以上への拡張は第 8 章で行う．このような形での弱い相互作用の普遍性の実現は 1963 年にカビボ（N. Cabibbo）がハドロンを用いて提案したもののクォーク版である．

$\mathscr{L}_{V-A}$ に基づく理論には，次のような問題点が潜んでいる．

問題点 1．高いエネルギーでユニタリー性が壊れる．
問題点 2．くりこみ可能ではない．

ここでは，これらの問題点について要点のみを記載する．十分に理解できなくても説明不足によるものなので，気にせずに次節に移ってほしい．

ユニタリー性（unitarity）は確率の保存則と関係するため，問題点 1 は $\mathscr{L}_{V-A}$ に基づく理論が高エネルギー領域で確率の保存則が成り立たなくなることを意味する．具体的には，散乱過程において，すべての過程に関する遷移確率の和は 1 となり，この性質は S 行列（$S = I + iT$）とよばれる遷移確率振幅を表す行列を用いて $S^\dagger S = I$ と表される．ちなみに，T を用いると，$S^\dagger S = (I - iT^\dagger)(I + iT) = I$ より，

$$\mathrm{Im}\, T = \frac{1}{2i}(T - T^\dagger) = \frac{1}{2}T^\dagger T = \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{tot}} \tag{6.36}$$

が得られ，散乱の全断面積 σ_{tot} と関係する公式が導かれる．また，T の大きさ

に関する制限が存在するため，ユニタリー性の条件は σ_{tot} の大きさに限界があることを意味する．しかるに，$\mathscr{L}_{V-A}$ を用いて σ_{tot} を計算すると，フェルミ結合定数 G_F が質量次元 -2 をもつこと（ラグランジアン密度 $\mathscr{L}$，フェルミオン場 ψ の質量次元はそれぞれ 4，3/2 である）に起因して，σ_{tot} はエネルギーと共に増大する．このため，例えば，e^- と $\overline{\nu}_e$ の弾性散乱においては 700 GeV のあたりでユニタリー性の限界を超え，確率の保存則が成立しなくなる．

くりこみ可能な理論（量子補正に現れる発散量を有限個のパラメータや波動関数に押し込め，観測量に置き換えることにより，見かけ上無限大の量を取り除くことができる理論で予言能力が高いという特質をもつ）の典型例は量子電磁力学である．一方，$\mathscr{L}_{V-A}$ に基づく理論では，摂動の高次で新たな発散量が次々と現れ，それらを取り除くために無限個の相殺項（無限個のパラメータ）を必要とするため，高エネルギーで予言能力の乏しい理論となる．この問題点も G_F が質量次元 -2 をもつことに起因する．実際，理論がくりこみ可能になるための必要条件は理論に含まれるパラメータの質量次元が 0 以上であることが知られている．

6.3 弱い相互作用を記述するゲージ群

問題点 1，2 の根源は質量次元 -2 をもつ結合定数 G_F の存在である．よって，G_F をあらわに含まずに理論を構成することが問題点を解消する鍵となる．ゲージ結合定数の質量次元は 0 であることに注目し，次の予想をヒントにして弱い相互作用に関するゲージ理論を構成してみよう．

> 予想：ν_e と e^-，ν_μ と μ^-，u と d，c と s の左手型成分がそれぞれ 2 重項を組んで弱い相互作用に関与する．

ゲージ理論を構築する第 1 段階として，ゲージ群を特定する必要がある．荷電カレントが満たす交換関係およびクォークやレプトンの量子数に基づいて，ゲージ群の有力候補として $SU(2) \times U(1)$ が以下のような議論に基づいて浮かび上がる．

荷電カレント $J_\mu(x)$ は $SU(2)$ ゲージ群（$SU(2)_L$）に関するゲージカレント

$$j_\mu^a(x) \equiv \sum_j \overline{\psi}_{Lj} \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} \psi_{Lj} \tag{6.37}$$

の一部であるとする．ここで，τ^a（$a = 1, 2, 3$）はパウリ行列，$\psi_{Lj}(x)$ は左手型のクォークやレプトンで $SU(2)_L$ の 2 重項

$$\psi_{Lj} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \tag{6.38}$$

である．(6.38) で，d_L や s_L は $SU(2)_L$ の固有状態で，(6.35) の d' や s' に相

当する．$j^a_\mu(x)$ は $SU(2)_L$ に関するカレント代数の交換関係を満たし，$J_\mu(x)$ は $j^a_\mu(x)$ の $a=1$ と $a=2$ の成分を用いて，

$$J_\mu(x) = 2\left(j^1_\mu(x) - ij^2_\mu(x)\right) \equiv 2j^-_\mu(x), \tag{6.39}$$

$$J^\dagger_\mu(x) = 2\left(j^1_\mu(x) + ij^2_\mu(x)\right) \equiv 2j^+_\mu(x) \tag{6.40}$$

で与えられるとする．

表 6.5　物質粒子のゲージ量子数.

物質粒子 (ψ_j)	$SU(2)_L$	T^3_L	Q	$Y \equiv Q - T^3_L$
$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$
u_R	**1**	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	**1**	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$l_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$
e_R	**1**	0	-1	-1

クォークとレプトンのゲージ量子数をまとめると表 6.5 のようになる．ここでは，簡単のため，ν_R を導入していない（ν_R に関する物理は 8.3 節参照）．また，第 1 世代の粒子（u, d, e^-, ν_e）のみを記した．第 2 世代の粒子（c, s, μ^-, ν_μ）も同様の量子数をもつ．$SU(2)_L$ に関する量子数は**弱アイソスピン**（weak isospin）とよばれ，その生成子を T^a_L と表記する．表 6.5 からわかるように，電荷と弱アイソスピンは独立ではない．実際，$[Q, T^1_L] \neq 0$，$[Q, T^2_L] \neq 0$ である．興味深いことに，すべての T^a_L ($a = 1, 2, 3$) と交換するゲージ量子数として $Q - T^3_L$ が存在する．すなわち，$[Q - T^3_L, T^a_L] = 0$ が成り立つ．$e^{i\theta Q}$ と $\exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\theta^a T^a_L\right)$ は可換ではないが，$e^{i\theta(Q-T^3_L)}$ と $\exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\theta^a T^a_L\right)$ は可換である．こうして，$SU(2)_L$ と独立な $U(1)$ チャージとして $Y \equiv Q - T^3_L$ が定義される．ここで，Y は**弱超電荷（弱ハイパーチャージ）**（weak hypercharge）とよばれる．以後，「弱」を省略して単にハイパーチャージとよぶことにする．‘強い’相互作用に関するハドロンのハイパーチャージと混同しないように注意しよう．このようにして，弱い相互作用を記述するゲージ群の候補として $SU(2)_L \times U(1)_Y$ が得られる．重要な点は，**$U(1)_Y$ は電磁相互作用のゲージ群（$U(1)_{\mathrm{EM}}$）と同一ではなく，$U(1)_{\mathrm{EM}}$ は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の部分群であること，すなわち，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づく弱い相互作用のゲージ理論には電磁相互作用が必然的に含まれているということである．**

物質粒子の $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に関するゲージ量子数が特定されたので，ゲージ原理を適用してゲージ理論を構成することができる．まずは，$SU(2)_L \times U(1)_Y$

表 6.6　ゲージ群，ゲージ結合定数，ゲージ場，生成子．

ゲージ群	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
ゲージ結合定数	g	g'
ゲージ場	$W_\mu^a(x)$ $(a=1,2,3)$	$B_\mu(x)$
生成子	T_L^a	Y

に関する 2 種類のゲージ場 $W_\mu^a(x)$ と $B_\mu(x)$ が導入される．表 6.6 にゲージ群，ゲージ結合定数，ゲージ場，生成子を列挙した．局所的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 変換のもとで不変なラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\psi,W} = \sum_j \overline{\psi}_j i\gamma^\mu D_\mu \psi_j - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{6.41}$$

で与えられる．ここで，$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{3} T_L^a W_\mu^a + ig'YB_\mu$ である．また，W_μ^a，B_μ に関するゲージ場の強さはそれぞれ

$$W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\sum_{b,c=1}^{3} \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \tag{6.42}$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{6.43}$$

で定義される．$\mathscr{L}_{\psi,W}$ は

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\psi,W} &= \sum_j \left(\overline{\psi}_j i\partial\!\!\!/ \psi_j - g\overline{\psi}_j \sum_{a=1}^{3} T_L^a W\!\!\!\!/^a \psi_j - g'\overline{\psi}_j Y B\!\!\!/ \psi_j\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{6.44}$$

のように書き換えられ，(6.1) と見比べると（項の順番や細かい因子の違いは別として）最初の 5 つの項と対応することがわかる．**このようにして，(6.1) の 3 行目までが解読された！**

$\mathscr{L}_{\psi,W}$ により記述される系は，ゲージ対称性によりゲージ粒子も物質粒子も質量をもっていない．すなわち，ψ_L と ψ_R が $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に関して異なるゲージ量子数を有するため，ゲージ不変な形であらわな質量項は許されない．ゲージ原理はゲージ相互作用の導入に際し効力を発揮するが，このままでは現実世界の記述としては不十分である．実際に，我々が観測している質量が 0 のゲージ粒子は光子のみである．さらに，物質粒子が質量をもつことも実験で確かめられているため，ゲージ対称性と抵触せずに質量を獲得する機構が存在すると予想される．次節でヒグス機構とよばれる機構を考察する．

6.4 ヒグス機構

質量の起源を求めて，(6.1) の 5 行目と 6 行目，すなわち，

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{i,j} \overline{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + \text{h.c.} \\
&+ |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$

に注目しよう．ϕ の運動項の形から ϕ はボソンで，さらに時空に関する余分な添字（μ など）がないのでスカラー粒子であると予想される．もし，ϕ が定数値 $\langle\phi\rangle$ を取ったならば，(6.1) の 5 行目から，

$$
\sum_{i,j} y_{ij} \langle\phi\rangle \overline{\psi}_i \psi_j + \text{h.c.} \tag{6.46}
$$

のような物質粒子の質量項に相当する項が生じることがわかる．ここで，スカラーの値は任意の慣性系で変わらない（$\phi'(x') = \phi(x)$）ため，$\phi(x)$ が定数値を取っても相対論的不変性に抵触しないことに注意しよう．ちなみに，定ベクトルや定スピノルの値はローレンツ変換のもとで変化するため，ゲージ場 $A_\mu(x)$ や物質場 $\psi(x)$ が（スカラー量の束縛状態を構成しない限り）0 でない定数値を取ることは相対論的不変性から許されない．

さらに，(6.1) の 6 行目の第 1 項 $|D_\mu\phi|^2$ から，

$$
\left| \left(g \sum_{a=1}^{3} T_L^a W_\mu^a + g' Y B_\mu \right) \langle\phi\rangle \right|^2 \tag{6.47}
$$

のようなゲージ場に関する 2 次式，すなわち，ゲージ場の質量項が生じる．

このようにして，$\langle\phi\rangle$ の起源の探究が次の課題となる．$\langle\phi\rangle$ はエネルギーが最小の状態における ϕ の値と考えられる．場の量子論において，エネルギーが最小の状態は**真空状態**とよばれる．ここで，エネルギーが最小の状態とはエネルギー演算子であるハミルトニアンの期待値が最小の状態で，一般に場の値が定数で，ポテンシャルエネルギーの値が最小の状態に相当する．(6.1) の 6 行目に存在する $V(\phi)$ がポテンシャルエネルギー密度（空間積分した量がポテンシャルエネルギー）と考えられる．

6.4.1 ゴールドストーン模型

真空状態におけるスカラー場の値を考察するために，**ゴールドストーン模型**とよばれる，ラグランジアン密度が

$$
\mathscr{L} = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) + \mu^2 \phi^\dagger(x)\phi(x) - \lambda(\phi^\dagger(x)\phi(x))^2 \tag{6.48}
$$

で与えられる，ゲージ場を含まない模型について考察しよう．ここで，$\phi(x)$ は 1 成分の複素スカラー場である．$\mathscr{L}$ は大局的 $U(1)$ 変換

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \to \phi'^\dagger(x) = e^{-i\theta}\phi^\dagger(x) \tag{6.49}$$

のもとで不変である．ここで，θ は実定数である．ネーターの定理に従い，(6.49) に関する保存カレント $N_\mu(x)$，保存チャージ $\mathscr{N}$ はそれぞれ

$$N_\mu(x) = i\left(\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x) - \partial_\mu\phi^\dagger(x)\phi(x)\right), \tag{6.50}$$

$$\mathscr{N} = \int N^0(x)d^3x = i\int\left(\phi^\dagger(x)\Pi^\dagger(x) - \Pi(x)\phi(x)\right)d^3x \tag{6.51}$$

で与えられる．ここで，$\Pi(x)$，$\Pi^\dagger(x)$ はそれぞれ $\phi(x)$，$\phi^\dagger(x)$ に関する正準共役な運動量の場で，次で定義される．

$$\Pi(x) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial\phi^\dagger(x)}{\partial t}, \quad \Pi^\dagger(x) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^\dagger} = \frac{\partial\phi(x)}{\partial t}. \tag{6.52}$$

ルジャンドル変換を用いて，ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H = \int &\left\{\Pi^\dagger(x)\Pi(x) + \nabla\phi^\dagger(x)\cdot\nabla\phi(x)\right. \\ &\left. -\mu^2\phi^\dagger(x)\phi(x) + \lambda(\phi^\dagger(x)\phi(x))^2\right\}d^3x \end{aligned} \tag{6.53}$$

が得られる．エネルギーの値が最小となるのは，場の値が定数でポテンシャル $V = -\mu^2\phi^\dagger(x)\phi(x) + \lambda(\phi^\dagger(x)\phi(x))^2$ が最小のところである．$\lambda < 0$ のときは，$|\phi|$ の値を大きくすればするほど V の値はいくらでも小さくなるので安定な真空状態は存在しない．よって，以後は $\lambda > 0$ の場合を考察する．V を

$$V = \lambda\left(|\phi|^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \tag{6.54}$$

のように書き換えると，μ^2 の値の正負に応じて真空状態に違いが現れることがわかる．ここで，$|\phi|^2 = \phi^\dagger\phi$ である．$\mu^2 < 0$ のときは，$\phi = 0$ が真空状態に相当する（図 6.4 参照）．また，$\mu^2 > 0$ のときは，$|\phi|^2 = \dfrac{\mu^2}{2\lambda}$ が真空状態に相当し，無限に縮退している（図 6.5 参照）．この場合の V の概形はメキシカンハットやワインボトルの底を連想させる．真空状態として $\langle 0|\phi|0\rangle = \sqrt{\dfrac{\mu^2}{2\lambda}} \equiv \dfrac{v}{\sqrt{2}}$ を選び，そのまわりで $\phi(x)$ を，

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{i\frac{\pi(x)}{v}} \tag{6.55}$$

のように展開する．$\rho(x)$，$\pi(x)$ は (6.49) のもとで，

$$\rho(x) \to \rho'(x) = \rho(x), \quad \pi(x) \to \pi'(x) = \pi(x) + \theta v \tag{6.56}$$

のように変換することに注意しよう．このとき，無限小 $U(1)$ 変換のもとで $\pi(x)$ は

$$\delta\pi(x) = \frac{\varepsilon}{i}\int[\pi(x), N^0(y)]d^3y = \varepsilon v \tag{6.57}$$

のように変換する．よって，

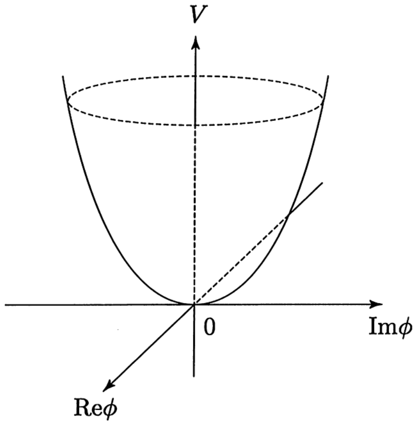


図 6.4　$\mu^2 < 0$ のときの V.

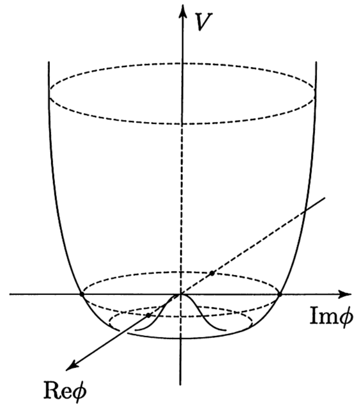


図 6.5　$\mu^2 > 0$ のときの V.

$$\langle 0|\delta\pi(x)|0\rangle = \frac{\varepsilon}{i}\langle 0|\int[\pi(x), N^0(y)]d^3y|0\rangle = \varepsilon v \neq 0 \tag{6.58}$$

が成立する．このとき，$\mathscr{N}$ がよく定義できないため形式的ではあるが，$\int[\pi(x), N^0(y)]d^3y$ を $[\pi(x), \mathscr{N}]$ と表記すると，

$$\mathscr{N}|0\rangle \neq 0,\quad \text{すなわち,}\quad e^{i\theta\mathscr{N}}|0\rangle \neq |0\rangle \tag{6.59}$$

のような形式的な関係式を通して，真空状態が $U(1)$ 変換のもとで不変ではないことが暗にわかる．このように作用積分や運動方程式は変換のもとでの不変性を有するが，物理状態が不変性を破る現象は**対称性の自発的破れ**（spontaneous symmetry breakdown）とよばれる．

対称性の自発的破れが起こったのちのラグランジアン密度は，(6.55) を (6.48) に代入して，

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho}{v}\right)^2 \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho - 2\mu^2\rho^2\right)\\ &-\sqrt{\mu^2\lambda}\rho^3 - \frac{\lambda}{4}\rho^4\end{aligned} \tag{6.60}$$

となる．ただし，定数は除いている．また，$\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(v + \tilde{\rho}(x) + i\tilde{\pi}(x))$ のような表示を用いると，

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\pi}\partial^\mu\tilde{\pi} + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\rho}\partial^\mu\tilde{\rho} - 2\mu^2\tilde{\rho}^2\right)\\ &-\sqrt{\mu^2\lambda}\tilde{\rho}\left(\tilde{\rho}^2+\tilde{\pi}^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\tilde{\rho}^2+\tilde{\pi}^2\right)^2\end{aligned} \tag{6.61}$$

となる．ここで，$\pi(x)$，あるいは $\tilde{\pi}(x)$ は対称性の自発的破れに付随して出現する質量 0 のボソンで，**南部・ゴールドストーンボソン**（Nambu-Goldstone boson）とよばれる．

6.4.2　ヒグス模型

局所的対称性をもつ系において，対称性が自発的に破れた場合，何が起こるのかを知るために**ヒグス模型**とよばれる，ラグランジアン密度が

$$\mathscr{L} = (D_\mu\phi(x))^\dagger D^\mu\phi(x) + \mu^2|\phi(x)|^2 - \lambda|\phi(x)|^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (6.62)$$

で与えられる模型について考察しよう．ここで，$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x)$，$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ である．この模型はゴールドストーン模型にゲージ原理を採用することにより導かれる．電磁場を想定しているわけではないが，ゲージ場を A_μ，ゲージ結合定数を e とした．$\mathscr{L}$ は局所的 $U(1)$ 変換

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta(x)}\phi(x),\ A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \quad (6.63)$$

のもとで不変である．

ゴールドストーン模型の場合と同様に，$\mu^2 > 0$，$\lambda > 0$ のとき，対称性の自発的破れが発生し，$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{i\frac{\pi(x)}{v}}$ という表示を用いて，

$$\begin{aligned}\mathscr{L} =\ & \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho - 2\mu^2\rho^2\right) - \sqrt{\mu^2\lambda}\rho^3 - \frac{\lambda}{4}\rho^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\ & +\frac{1}{2}(ev)^2\left(1 + \frac{\rho}{v}\right)^2\left(A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\pi\right)\left(A^\mu + \frac{1}{ev}\partial^\mu\pi\right) \quad (6.64)\end{aligned}$$

が得られる．ゲージ場を $V_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \frac{1}{ev}\partial_\mu\pi(x)$ として再定義すると，南部・ゴールドストーンボソン $\pi(x)$ が姿を消す．こうして，物理的な粒子は質量 $m_\rho = \sqrt{2\lambda}v$ をもつスピン 0 の粒子 $\rho(x)$ と質量 $m_V = ev$ をもつスピン 1 の粒子 $V_\mu(x)$ であることがわかる．**対称性の自発的破れに伴いゲージ場が $\pi(x)$ を吸収することにより，質量を獲得した**と理解される．作用積分や運動方程式のレベルではゲージ対称性が存在すること，真空状態の選択により，ゲージ対称性が壊れてみえていることに注意しよう．このような質量獲得機構は 1964 年にブルー（R. Brout），エングレール（F. Englert），および独立にヒグス（P. W. Higgs）により提案されたもので**ヒグス機構**（Higgs mechanism），あるいは最近ではブルー・エングレール・ヒグス機構とよばれている．

6.5　電弱理論

弱い相互作用を記述するゲージ理論に戻る．ゲージ群は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ で，その一部が自発的に破れていると考えられる．この節では，ヒグス機構を通して，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ が $U(1)_{\text{EM}}$（電磁相互作用に関するゲージ群）に壊れる最も単純な模型を構築する．

6.5.1　ヒグス 2 重項の導入

表 6.7 のようなゲージ量子数をもつ $SU(2)_L$ に関する 2 重項（ヒグス 2 重

表 6.7　ヒグス 2 重項に関するゲージ量子数.

ヒグス 2 重項	$SU(2)_L$	T_L^3	Q	$Y \equiv Q - T_L^3$
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$

項）により対称性の自発的破れを起こす模型が最も単純である．

ヒグス 2 重項 Φ の導入に伴い，ラグランジアン密度として，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{H}} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi + \mu^2 |\Phi|^2 - \lambda |\Phi|^4, \tag{6.65}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}} = \sum_{A,B} (y_{AB}^{(e)} \bar{l}_{LA} \Phi e_{RB} + y_{AB}^{(d)} \bar{q}_{LA} \Phi d_{RB} + y_{AB}^{(u)} \bar{q}_{LA} \tilde{\Phi} u_{RB} + \text{h.c.}) \tag{6.66}$$

が追加される．ここで，$\tilde{\Phi}$ は Φ の反粒子に相当する場で，

$$\tilde{\Phi} \equiv i\tau^2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{6.67}$$

で定義される．また，A，B は世代を表す添字，$y_{AB}^{(X)}$ （$X = e, d, u$）は湯川結合定数，h.c. はエルミート共役を表す．$y_{AB}^{(X)}$ は一般に複素パラメータであるため，$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}$ の 1 行目だけではエルミートではない．$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}$ がエルミート演算子になるためにエルミート共役な項を加えていることに注意しよう．

表 6.5，表 6.7 より，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換のもとでの物質粒子とヒグス 2 重項に関する変換性が次のように読み取れる．

$$\begin{aligned}
&q_{LA}(x) \to q'_{LA}(x) = e^{i\sum_{a=1}^{3} \theta^a(x) \frac{\tau^a}{2}} e^{\frac{i}{6}\theta(x)} q_{LA}(x), \\
&u_{RA}(x) \to u'_{RA}(x) = e^{\frac{2i}{3}\theta(x)} u_{RA}(x), \\
&d_{RA}(x) \to d'_{RA}(x) = e^{-\frac{i}{3}\theta(x)} d_{RA}(x), \\
&l_{LA}(x) \to l'_{LA}(x) = e^{i\sum_{a=1}^{3} \theta^a(x) \frac{\tau^a}{2}} e^{-\frac{i}{2}\theta(x)} l_{LA}(x), \\
&e_{RA}(x) \to e'_{RA}(x) = e^{-i\theta(x)} e_{RA}(x), \\
&\Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{i\sum_{a=1}^{3} \theta^a(x) \frac{\tau^a}{2}} e^{\frac{i}{2}\theta(x)} \Phi(x), \\
&\bar{q}_{LA}(x) \to \bar{q}'_{LA}(x) = \bar{q}_{LA}(x) e^{-i\sum_{a=1}^{3} \theta^a(x) \frac{\tau^a}{2}} e^{-\frac{i}{6}\theta(x)}, \\
&\bar{l}_{LA}(x) \to \bar{l}'_{LA}(x) = \bar{l}_{LA}(x) e^{-i\sum_{a=1}^{3} \theta^a(x) \frac{\tau^a}{2}} e^{\frac{i}{2}\theta(x)}, \\
&\tilde{\Phi}(x) \to \tilde{\Phi}'(x) = \tilde{\Phi}(x) e^{-i\sum_{a=1}^{3} \theta^a(x) \frac{\tau^a}{2}} e^{-\frac{i}{2}\theta(x)}.
\end{aligned}$$

よって，$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}$ は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換のもとで不変である．

前節で議論したように $\mu^2 > 0$，$\lambda > 0$ のとき，縮退した真空状態が現れる．真空状態

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{6.68}$$

において，壊れずに残る対称性は $U(1)_{\mathrm{EM}}$ である．具体的には，ヒグス 2 重項に対して，電荷 Q に関する表現行列は

$$Q = T_L^3 + Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.69}$$

と表され，これを $\langle 0|\Phi|0\rangle$ に作用させると，

$$Q\langle 0|\Phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.70}$$

すなわち，$e^{i\theta(x)Q}\langle 0|\Phi|0\rangle = \langle 0|\Phi|0\rangle$ が成り立ち，電磁相互作用に関するゲージ対称性が壊れずに残っていることがわかる．

$\mathscr{L}_{\mathrm{H}}$ に基づいて，対称性の自発的破れが起こったのち，どのような粒子がどのような質量をもつかみてみよう．ヒグス 2 重項を真空状態のまわりで，

$$\Phi(x) = \exp\left(i\frac{\sum_{a=1}^{3}\zeta^a(x)\tau^a}{v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{6.71}$$

のように展開する．(6.71) を $\mathscr{L}_{\mathrm{H}}$ に代入し，ゲージ場の再定義により $\zeta^a(x)$ を消し去り，行列の対角化などを行ったのち，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{H}} = & \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 \left(1 + \frac{h}{2v}\right)^2 \\ & + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}\left(1 + \frac{h}{v}\right)^2 + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \left(1 + \frac{h}{v}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.72}$$

が得られる．ここで，$W_\mu^\pm$ および Z_μ はそれぞれ

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2\right), \tag{6.73}$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathrm{W}} & -\sin\theta_{\mathrm{W}} \\ \sin\theta_{\mathrm{W}} & \cos\theta_{\mathrm{W}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \tag{6.74}$$

で定義される．ここで，θ_{W} は**ワインバーグ角**（Weinberg angle），あるいは弱混合角（weak mixing angle）とよばれるパラメータでゲージ結合定数を用いて $\tan\theta_{\mathrm{W}} = \dfrac{g'}{g}$ と表される．θ_{W} の実験値は $\sin^2\theta_{\mathrm{W}}(M_Z)|_{\mathrm{exp}} \doteqdot 0.23$ である．(6.72) には A_μ が現れていないので A_μ は質量 0 の粒子に関する場で光子場と考えられる．実際に，(6.47) に基づいてゲージ場の質量項を計算すると，

$$\left|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & g\left(W_\mu^1 - iW_\mu^2\right) \\ g\left(W_\mu^1 + iW_\mu^2\right) & gW_\mu^3 - g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(gvW^{-\mu}, \frac{v}{\sqrt{2}}\left(gW^3_\mu - g'B_\mu\right)\right)\begin{pmatrix} gvW^+_\mu \\ \frac{v}{\sqrt{2}}\left(gW^3_\mu - g'B_\mu\right)\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}g^2v^2W^+_\mu W^{-\mu} \\
&\quad + \frac{1}{8}\left(g^2+g'^2\right)v^2\left(\frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}W^3_\mu - \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}B_\mu\right) \\
&\qquad \times\left(\frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}W^{3\mu} - \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}B^\mu\right)
\end{aligned}
\tag{6.75}
$$

となり，$\cos\theta_{\mathrm{W}} \equiv \dfrac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$，$\sin\theta_{\mathrm{W}} \equiv \dfrac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}$ と定義することにより，第 2 項が Z_μ に関する質量項であることがわかる．

(6.72) において，m_h，M_W，M_Z はそれぞれ h，$W^\pm_\mu$，Z_μ に関する質量で，

$$
m_h \equiv \sqrt{2\lambda}v, \quad M_W \equiv \frac{1}{2}gv, \quad M_Z \equiv \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,v \tag{6.76}
$$

と表される（M_W，M_Z に関しては (6.75) 参照）．h は**ヒグス粒子**（**ヒグスボソン**）とよばれるスカラー粒子である．$W^\pm_\mu$ は**荷電ウィークボソン**，Z_μ は**中性ウィークボソン**とよばれ，$\zeta^a(x)$ を吸収して質量を獲得している．M_W と M_Z の間には，

$$
\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2\cos^2\theta_{\mathrm{W}}} = 1 \tag{6.77}
$$

の関係が成立する．ここで，ρ は ρ パラメータとよばれ，理論の検証および未知の理論探究の試金石となる．ρ パラメータの実験値は $\rho|_{\mathrm{exp}} \fallingdotseq 1.01$ で，1 からのずれは量子補正によるもので理論の正しさを示している．

物質粒子を $\overline{\psi}_i$ や ψ_j と記し，$y^{(X)}_{AB}$ を y_{ij} に，Φ を ϕ に置き換えることにより，$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}$ が (6.1) の 5 行目に，$\mathscr{L}_{\mathrm{H}}$ が 6 行目に相当することがわかる．ラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{WS}} = \mathscr{L}_{\psi,W} + \mathscr{L}_{\mathrm{Y}} + \mathscr{L}_{\mathrm{H}}$ に基づく理論は，1961 年のグラショウ（S. Glashow）による先駆的な試みの後，1967〜68 年にワインバーグ（S. Weinberg）とサラム（A. Salam）によりヒグス機構を導入して整備された理論で，現在，**電弱理論**（electroweak theory）または**ワインバーグ・サラム理論**（Weinberg-Salam theory）とよばれている．

$\mathscr{L}_{\mathrm{WS}}$ と $\mathscr{L}_{V-A}$ を比較することにより，v の値を求めよう．電弱理論で $\mathscr{L}_{V-A}$ に対応するものは，$W^\pm_\mu$ を媒介にする相互作用である．図 6.6 のような過程に関して，低エネルギーの極限（$p^2 \ll M_W^2$）を評価すると，

$$
\frac{g^2}{2}\frac{j^+_\mu(x)j^{-\mu}(x)}{p^2 - M_W^2 + i\varepsilon} \Rightarrow -\frac{g^2}{2M_W^2}j^+_\mu(x)j^{-\mu}(x) = -\frac{1}{2v^2}J^\dagger_\mu(x)J^\mu(x) \tag{6.78}
$$

となる．ここで，ファインマン則に基づき $W^\pm_\mu$ の伝搬を伝搬関数とよばれる数式 $\dfrac{i\eta_{\mu\nu}}{p^2 - M_W^2 + i\varepsilon}$ に置き換えた．右辺の量が (6.29) で与えられた $\mathscr{L}_{V-A}$ と

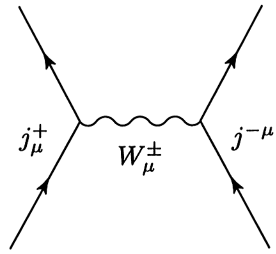


図 6.6　$W_\mu^\pm$ を媒介とする相互作用.

等しいという条件から,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}} \doteqdot 246\ \mathrm{GeV} \tag{6.79}$$

が導かれる.

また, (6.73), (6.74), $Y = Q - T_L^3$ を用いて,

$$\begin{aligned} D_\mu &\equiv \partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{3} T_L^a W_\mu^a + ig'YB_\mu \\ &= \partial_\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}}T_L^\pm W_\mu^\pm + i(gT_L^3\cos\theta_\mathrm{W} - g'Y\sin\theta_\mathrm{W})Z_\mu \\ &\quad +i(gT_L^3\sin\theta_\mathrm{W} + g'Y\cos\theta_\mathrm{W})A_\mu \\ &= \partial_\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}}T_L^\pm W_\mu^\pm + i\frac{g}{\cos\theta_\mathrm{W}}(T_L^3 - \sin^2\theta_\mathrm{W}Q)Z_\mu \\ &\quad +i\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}QA_\mu \end{aligned} \tag{6.80}$$

と表される. ここで, $T_L^\pm = \dfrac{T_L^1 \pm iT_L^2}{2}$ である. (6.80) の最後の項が電磁相互作用に関するもので, ゲージ結合定数 e, g, g' の間に,

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} = g\sin\theta_\mathrm{W} = g'\cos\theta_\mathrm{W} \tag{6.81}$$

が成り立つことがわかる.

6.5.2　湯川相互作用項

湯川相互作用項 $\mathscr{L}_\mathrm{Y}$ に基づいて, 対称性の自発的破れが起こったのちの物質粒子に関する質量について考察しよう. 簡単のため, 2 世代のみを考える. 3 世代以上への拡張は第 8 章で行う. $\mathscr{L}_\mathrm{Y}$ において, ヒグス 2 重項を (6.68) で与えられる真空期待値で置き換えた場合,

$$\begin{aligned} \sum_{A,B} \Bigg(&\frac{1}{\sqrt{2}}y_{AB}^{(e)}v\overline{e}_{LA}e_{RB} + \frac{1}{\sqrt{2}}y_{AB}^{(d)}v\overline{d}_{LA}d_{RB} \\ &+\frac{1}{\sqrt{2}}y_{AB}^{(u)}v\overline{u}_{LA}u_{RB} + \mathrm{h.c.}\Bigg) \end{aligned} \tag{6.82}$$

という項が生じる．湯川結合定数 $y_{AB}^{(X)}$ （$X = e, d, u$）は一般に複素数の値を取るため，2×2 複素行列と考えられ，2 種類のユニタリー行列 S_X，T_X を用いて，

$$\sum_{C,D}(S_X^\dagger)_{AC}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_{CD}^{(X)}v\right)(T_X)_{DB} = m_A^{(X)}\delta_{AB} \tag{6.83}$$

のように対角化される．固有値（対角化された行列の対角成分の値）は物質粒子の質量パラメータである．

ゲージ対称性の固有状態 $\psi^{(W)}$ と質量の固有状態 $\psi^{(M)}$ は，S_X と T_X を介して，

$$\begin{pmatrix} e_L^{(W)} \\ \mu_L^{(W)} \end{pmatrix} = S_e \begin{pmatrix} e_L^{(M)} \\ \mu_L^{(M)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_R^{(W)} \\ \mu_R^{(W)} \end{pmatrix} = T_e \begin{pmatrix} e_R^{(M)} \\ \mu_R^{(M)} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} d_L^{(W)} \\ s_L^{(W)} \end{pmatrix} = S_d \begin{pmatrix} d_L^{(M)} \\ s_L^{(M)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_R^{(W)} \\ s_R^{(W)} \end{pmatrix} = T_d \begin{pmatrix} d_R^{(M)} \\ s_R^{(M)} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} u_L^{(W)} \\ c_L^{(W)} \end{pmatrix} = S_u \begin{pmatrix} u_L^{(M)} \\ c_L^{(M)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_R^{(W)} \\ c_R^{(W)} \end{pmatrix} = T_u \begin{pmatrix} u_R^{(M)} \\ c_R^{(M)} \end{pmatrix} \tag{6.84}$$

のような関係にある．クォークに関する荷電カレント $j_{(q)}^{+\mu}$ は

$$\begin{aligned} j_{(q)}^{+\mu} &= \sum_A \overline{q}_{LA}^{(W)}\gamma^\mu\tau^+ q_{LA}^{(W)} = \sum_A \overline{u}_{LA}^{(W)}\gamma^\mu d_{LA}^{(W)} \\ &= \sum_{A,B} \overline{u}_{LA}^{(M)}\gamma^\mu(S_u^\dagger S_d)_{AB} d_{LB}^{(M)} \end{aligned} \tag{6.85}$$

のように書き換えられ，$S_u^\dagger S_d$ が単位行列に比例しない場合，カビボが指摘したような世代間の混合が起こることがわかる．

一方，中性カレントにおいては世代間の混合が起こらない．このことは，$j_{(q)}^{3\mu}$ において，

$$\begin{aligned} j_{(q)}^{3\mu} &= \sum_A \overline{q}_{LA}^{(W)}\gamma^\mu\tau^3 q_{LA}^{(W)} = \sum_A (\overline{u}_{LA}^{(W)}\gamma^\mu u_{LA}^{(W)} - \overline{d}_{LA}^{(W)}\gamma^\mu d_{LA}^{(W)}) \\ &= \sum_{A,B}\left\{\overline{u}_{LA}^{(M)}\gamma^\mu(S_u^\dagger S_u)_{AB} u_{LB}^{(M)} - \overline{d}_{LA}^{(M)}\gamma^\mu(S_d^\dagger S_d)_{AB} d_{LB}^{(M)}\right\} \\ &= \sum_A (\overline{u}_{LA}^{(M)}\gamma^\mu u_{LA}^{(M)} - \overline{d}_{LA}^{(M)}\gamma^\mu d_{LA}^{(M)}) \end{aligned} \tag{6.86}$$

のような書き換えを通して理解される．ここで，S_u や S_d がユニタリー行列であることを用いた．同様にしてハイパーチャージに関するカレントについても混合が起こらないことが示される．

6.5.3 電弱理論の検証

ゲージ群 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づいて，弱い相互作用と電磁相互作用を統

一的に理解する枠組が構築された．有効理論に潜む2つの問題点は次のように解消される．ユニタリー性の問題に関してはウィークボソンやヒグス粒子が寄与することによりユニタリー性の崩壊は生じないことが示される．また，くりこみ可能性の問題に関しては，ヒグス機構がはたらく場合を含めてゲージ理論が一般にくりこみ可能であることが証明される．

このようにして理論は整備され，実験による検証を通して電弱理論の正否を判定する段階に来た．具体的には，ウィークボソンとヒグス粒子を発見し，その特徴を調べることが考えられる．ここでは，質量公式 (6.76) について考察しよう．e，$\sin\theta_{\mathrm{W}}$，v の値はわかっているので，

$$M_W = \frac{ev}{2\sin\theta_{\mathrm{W}}} \doteqdot 80.3\ \mathrm{GeV}, \quad M_Z = \frac{ev}{2\sin\theta_{\mathrm{W}}\cos\theta_{\mathrm{W}}} \doteqdot 91.5\ \mathrm{GeV} \quad (6.87)$$

のような値が予言される．ここで，$\left.\dfrac{e^2(M_Z)}{4\pi}\right|_{\mathrm{exp}} \doteqdot \dfrac{1}{128}$，$\sin^2\theta_{\mathrm{W}}(M_Z)|_{\mathrm{exp}} \doteqdot 0.23$，$v = 246\ \mathrm{GeV}$ を用いた．ヒグス粒子の質量に関しては，λ の値がわからないので，明確な予言はできない．ウィークボソンは，1983年にヨーロッパ原子核研究機構（CERN）での陽子・反陽子の衝突実験において発見された．現在得られている観測値は

$$M_W|_{\mathrm{exp}} \doteqdot 80.385\ \mathrm{GeV}, \quad M_Z|_{\mathrm{exp}} \doteqdot 91.1876\ \mathrm{GeV} \quad (6.88)$$

で，予言値とほぼ一致している．さらに，2012年にCERNでの大型ハドロン衝突型加速器（LHC）を用いた陽子・陽子の衝突実験においてヒグス粒子が発見され，その解析から得られた質量の値は

$$m_h|_{\mathrm{exp}} \doteqdot 125.09\ \mathrm{GeV} \quad (6.89)$$

である．このようにして，電弱理論が検証されている．

6.6 振り返りと見通し

弱い相互作用に関する荷電カレントをヒントにしてゲージ群 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ を探り当てた．そして，この対称性に対してゲージ原理を適用し，(6.1) の3行目までに相当するラグランジアン密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\psi,W} &= \sum_j \overline{\psi}_j i\gamma^\mu D_\mu \psi_j - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\ &= \sum_j \left(\overline{\psi}_j i\partial\!\!\!/ \psi_j - g\overline{\psi}_j \sum_{a=1}^{3} T^a W\!\!\!\!/^a \psi_j - g'\overline{\psi}_j Y B\!\!\!/ \psi_j\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.90)$$

を得た．これにより，$g'(=g_1)$，B_μ，$B_{\mu\nu}$ がそれぞれ $U(1)_Y$ に関するゲージ結合定数，ゲージ場，ゲージ場の強さを表し，$g(=g_2)$，W^a_μ，$W^a_{\mu\nu}$ がそれぞれ $SU(2)_L$ に関するゲージ結合定数，ゲージ場，ゲージ場の強さを表すことがわかった．さらに，素粒子の質量の起源を求めて，(6.1) の 5 行目と 6 行目

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i,j}\overline{\psi}_i y_{ij}\psi_j\phi + \text{h.c.} \\
&+|D_\mu\phi|^2 - V(\phi)
\end{aligned}
$$

の解読を行った．その際に以下の問いかけを念頭に置いた．

- 湯川結合定数 y_{ij} とは何か？
- エルミート共役 h.c. とは何か？その必要性は？
- 共変微分 D_μ とは何か？
- ヒグス粒子 ϕ とは何か？
- なぜ，ヒグス粒子を扱うのか？
- ヒグスポテンシャル $V(\phi)$ はどんな形をしているのか？
- ヒグス粒子が従う方程式はどんな形をしているのか？

これらの問いかけが踏み台の役割を果たし，電弱理論に到達することができた．この理論に基づいて，ヒグス粒子をヒグス 2 重項と読み替えて以下のような回答が与えられる．

- 湯川結合定数とは物質粒子とヒグス 2 重項の間の相互作用の強さを表す定数である．
- 湯川結合定数を含む項は単独ではエルミートではない．ラグランジアン密度のエルミート性は物理量が実数値を取ることと関係し，エルミート共役を加えたりしてエルミートにする必要がある．
- 共変微分にはゲージ場が含まれ，ゲージ場と物質粒子やヒグス 2 重項の間の相互作用の形がゲージ原理により決まる．
- ヒグス 2 重項とは真空状態を規定するスカラー粒子で，その中に含まれる物理的なスカラー粒子がヒグス粒子である．
- ヒグス 2 重項はその一部が 0 ではない真空期待値を得ることにより，対称性の自発的破れを発生させゲージ粒子や物質粒子が質量を獲得する機構（ヒグス機構）を発動させるために導入される．
- ヒグス 2 重項が 0 ではない真空期待値を得るために，そのポテンシャルはメキシカンハット型（の 4 次元版）をしている．
- ヒグス粒子は自己相互作用を含むクライン・ゴルドン方程式に従う．

残るは素粒子の標準数式の 4 行目（(1.1) 参照）で，その解読が次章の課題となる．

第 7 章
強い相互作用の理論

強い相互作用に関するゲージ群を特定し，ゲージ理論を構築し，その特徴を考察する．素粒子の標準数式における最後のピース（4 行目）の解読を目指し，グルーオンとよばれるゲージ場の役割に注目しながら読み進めてほしい．

7.1 強い相互作用

素粒子の標準数式 $\mathscr{L}$ の 4 行目は

$$-g_3\overline{\psi}\not{G}\psi - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}, \tag{7.1}$$

すなわち，

$$-\sum_j g_3\overline{\psi}_j\not{G}\psi_j - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \tag{7.2}$$

である．G_μ がクォークにはたらく強い相互作用を媒介するゲージ粒子であると予想される．ここで，強い相互作用とはクォークを束縛してハドロン（バリオンとメソンの総称）を構成するはたらきをもつ相互作用である．

以下で次のような課題に取り組もう．

- 強い相互作用の特徴を把握する．
- 強い相互作用のゲージ群を特定する．

まずはスピン 3/2 のバリオンに注目する．表 7.1 のようなスピン 3/2 をもつ 10 種類のバリオンの存在が知られている．ここでも自然単位系に基づき，質量は MeV/c^2 の代わりに MeV と記載した．6.1 節で登場した物理量 Q，I_3，B，S の間に $Q = I_3 + \dfrac{B+S}{2}$ が成立することがわかる．

さらに，表 7.1，表 6.3，(6.9) を用いて，スピン 3/2 のバリオンは

$$\Delta^{++} = uuu,\quad \Delta^{+} = uud,\quad \Delta^{0} = udd,\quad \Delta^{-} = ddd,$$

$$\Sigma^{*+} = uus,\quad \Sigma^{*0} = uds,\quad \Sigma^{*-} = dds,$$

表 7.1　スピン 3/2 のバリオンの量子数，質量，寿命．

	I_3	B	S	Y	Q	質量（MeV）	寿命（s）
Δ^{++}	$\frac{3}{2}$	1	0	1	2	1232	5.62×10^{-24}
Δ^{+}	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1	1232	5.62×10^{-24}
Δ^{0}	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	1232	5.62×10^{-24}
Δ^{-}	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	-1	1232	5.62×10^{-24}
Σ^{*+}	1	1	-1	0	1	1382.8	1.83×10^{-23}
Σ^{*0}	0	1	-1	0	0	1383.7	1.83×10^{-23}
Σ^{*-}	-1	1	-1	0	-1	1387.2	1.67×10^{-23}
Ξ^{*0}	$\frac{1}{2}$	1	-2	-1	0	1531.8	7.23×10^{-23}
Ξ^{*-}	$-\frac{1}{2}$	1	-2	-1	-1	1535.0	6.65×10^{-23}
Ω^{-}	0	1	-3	-2	-1	1672.45	8.21×10^{-11}

$$\Xi^{*0}=uss,\quad \Xi^{*-}=dss,\quad \Omega^{-}=sss \tag{7.3}$$

のようにクォークを用いて構成されることがわかる．

クォーク模型において，次のような問題が発生する．

> **統計の問題**：$\Delta^{++}=uuu$，$\Delta^{-}=ddd$，$\Omega^{-}=sss$ はいずれもフェルミオンで，これらの波動関数はクォークの入れ替えのもとで完全反対称でなければならない．しかるに，3 つのクォークのスピンが同じ状態は完全対称な形になるため，このままではスピンと統計の定理が成立しない．

スピンと統計の定理については，3.3.2 項を参照しよう．新しい自由度を導入することにより上記の問題が解決される．3 個の同種粒子を用いて反対称な状態をつくるために，各クォークに対して新たに 3 つの自由度をもつ量子数を導入する．この量子数を**色**（**カラー**）（color）と名付け，光の 3 原色を借用して，3 つの状態を $r=$ 赤，$g=$ 緑，$b=$ 青 の状態とよぶことにする．各クォークは色に関する $SU(3)$ の $\mathbf{3}$ 表現に属する，すなわち，3 重項を組むと仮定し，$q_{fc}=(q_{fr},q_{fg},q_{fb})$ と表記する（f は香りの自由度）．反粒子の内部量子数は複素共役表現（$U(1)$ チャージはその符号が反対）になるため，反クォーク（$\overline{q}_{fc}$）は色に関して $SU(3)$ の $\mathbf{3}^{*}$ 表現に属する．よって，メソン（$M_{ff'}$），バリオン（$B_{ff'f''}$）はそれぞれ

$$M_{ff'}=\sum_{c} q_{fc}\overline{q}_{f'c},\quad B_{ff'f''}=\sum_{c,c',c''}\varepsilon^{cc'c''}q_{fc}q_{f'c'}q_{f''c''} \tag{7.4}$$

のようにいずれも色 1 重項状態として表される．$B_{ff'f''}$ には 3 つの添字に関して完全反対称な $\varepsilon^{cc'c''}$ が存在するため，Δ^{++}，Δ^{-}，Ω^{-} の波動関数が完全反対称になることがわかる．このように色をもつクォークを用いてハドロンをうまく記述することができるが，「なぜ，実在するハドロンは色 1 重項なの

か？」という疑問が残る．これは「クォークの閉じ込め問題」とよばれる難問で，のちほど考察する．

7.2 量子色力学

前節で導入した色がゲージ量子数で，そのゲージ群が $SU(3)$ であるとして，クォークにはたらく強い相互作用を記述する理論を構築しよう．

自由なクォークに関するラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_q = \sum_{f=1}^{n_q} \overline{q}_f(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)q_f(x) \tag{7.5}$$

で与えられる．ここで，m_f はクォーク q_f の質量，f は香りに関する添字で香りの数は（一般性をもたせて）n_q とした．また，色に関する添字 c は省略した．$\mathscr{L}_q$ は色に関する大局的 $SU(3)$ 対称性（$SU(3)_C$）を有する．クォークは $SU(3)_C$ の $\mathbf{3}$ 表現に属する．ゲージ原理を採用して，「q_f に関する局所的 $SU(3)_C$ 変換

$$q_f(x) \to q'_f(x) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{8} \theta^a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right) q_f(x) \equiv U(x)q_f(x) \tag{7.6}$$

のもとで理論が不変であるべし」という要請を課す．ここで，$\theta^a(x)$（$a = 1, 2, \cdots, 8$）は任意の積分可能な実関数，λ^a はゲルマン行列とよばれる 8 種類のエルミート行列で具体形は (A.245) を参照しよう．以下のような手順のもとで強い相互作用に関するラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\text{QCD}}$ が導出される．

1. (7.6) のもとでの不変性を脅かす $\partial_\mu \theta^a(x)$ を含む項を消去するために，**グルーオン**（gluon），あるいは**グルーオン場**とよばれる $SU(3)_C$ の 8 重項を組む場 $G^a_\mu(x)$（$a = 1, 2, \cdots, 8$）を導入し，偏微分 ∂_μ を共変微分 $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_s \sum_{a=1}^{8} G^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2}$ に置き換える．すなわち，

$$\partial_\mu \;\Rightarrow\; D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_s \sum_{a=1}^{8} G^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2} \tag{7.7}$$

とする．ここで，g_s はゲージ結合定数である．

2. この置き換えにより，$\mathscr{L}_q$ が

$$\tilde{\mathscr{L}}_q = \sum_{f=1}^{n_q} \overline{q}_f(x) \left\{ i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_s \sum_{a=1}^{8} G^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2} \right) - m_f \right\} q_f(x) \tag{7.8}$$

になり，クォーク場 $q_f(x)$ とグルーオン場 $G^a_\mu(x)$ の間の相互作用の形が決まる．

3. $D_\mu q_f(x)$ がゲージ変換のもとで，ゲージ共変性

$$D_\mu q_f(x) \to D'_\mu q'_f(x) = U(x) D_\mu q_f(x) \tag{7.9}$$

を有するという要請から，$G^a_\mu(x)$ に関するゲージ変換性

$$\sum_{a=1}^{8} G^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2} \to \sum_{a=1}^{8} G'^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2}$$
$$= U(x)\sum_{a=1}^{8} G^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2}U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{7.10}$$

が導かれる．

4. 共変微分の間の交換関係

$$[D_\mu, D_\nu] = ig_s \sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}(x)\frac{\lambda^a}{2} \tag{7.11}$$

から導かれる

$$G^a_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu G^a_\nu(x) - \partial_\nu G^a_\mu(x) - g_s \sum_{b,c=1}^{8} f^{abc} G^b_\mu(x) G^c_\nu(x) \tag{7.12}$$

が**グルーオン場の強さ**として定義される．ここで，f^{abc} は $SU(3)$ のリー代数に関する構造定数である．$G^a_{\mu\nu}(x)$ は (7.10) のもとで，

$$\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}(x)\frac{\lambda^a}{2} \to \sum_{a=1}^{8} G'^a_{\mu\nu}(x)\frac{\lambda^a}{2} = U(x)\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}(x)\frac{\lambda^a}{2}U^{-1}(x) \tag{7.13}$$

のように変換する．

5. グルーオン場は光子場を拡張した場であるから，グルーオン場の運動項を記述するラグランジアン密度として，場を 2 次の形で，さらに偏微分も 2 次の形で含んだものがふさわしい．加えて，ローレンツ不変性とゲージ不変性を有する必要がある．このようなことから，運動項は $G^a_{\mu\nu}(x)$ の 2 次式で与えられると予想される．さらに (7.13) により，

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{a,b=1}^{8} G^a_{\mu\nu}\frac{\lambda^a}{2}G^{b\mu\nu}\frac{\lambda^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \tag{7.14}$$

はゲージ不変である．ここで，tr はゲージ群の元に関するトレースを表し，$\mathrm{tr}\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ を用いた．よって，グルーオン場の運動項は

$$\mathscr{L}_{G^a} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \tag{7.15}$$

で与えられる．こうして，グルーオン場の運動項の形も決まる．

6. $\tilde{\mathscr{L}}_q$ と $\mathscr{L}_{G^a}$ を合わせることにより，ラグランジアン密度

$$\tilde{\mathscr{L}}_q + \mathscr{L}_{G^a} = \sum_{f=1}^{n_q} \overline{q}_f(x)\left\{i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig_s\sum_{a=1}^{8} G^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2}\right) - m_f\right\} q_f(x)$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \tag{7.16}$$

に到達する．

さらに，θ 項とよばれる項

$$\mathscr{L}_\theta = \frac{\theta}{32\pi^2}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^{a\mu\nu} \tag{7.17}$$

を加えて，局所的な $SU(3)_C$ 変換のもとで不変なラグランジアン密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{QCD}} = &\sum_{f=1}^{n_q} \overline{q}_f(x)\left\{i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig_s\sum_{a=1}^{8} G^a_\mu(x)\frac{\lambda^a}{2}\right) - m_f\right\}q_f(x)\\ &-\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^{a\mu\nu}\end{aligned} \tag{7.18}$$

を得る．ここで，θ は θ パラメータとよばれる定数である．また，$\tilde{G}^{a\mu\nu}$ は

$$\tilde{G}^{a\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}G^a_{\lambda\rho} \tag{7.19}$$

で定義される．θ 項は CP 不変性を破る項で，全微分の形に書き表せるので，運動方程式には寄与しないが，真空の構造に関与するため物理的に重要である．$\mathscr{L}_{\mathrm{QCD}}$ に基づく場の量子論は **量子色力学**（quantum chromodynamics），略して QCD とよばれている．(7.19) において，クォークの質量はヒグス機構を通じて得られたものを想定している．

QCD は非可換ゲージ理論の一種でグルーオン場に関する自己相互作用項を含み非線形であるため解析的に解くことが困難である．さらに，ゲージ結合定数が低エネルギーで大きな値を取る，すなわち，相互作用が強くなるため，そこでは摂動論が有効に機能しない．以下の 3 節で QCD の特徴を紹介する．

7.3 漸近的自由性

場の量子論に含まれるパラメータは一般に量子補正を受けて，その有効的な値は距離（エネルギー）とともに変化する．その変化を記述する方程式はくりこみ群方程式（renormalization group equation）とよばれる．

ゲージ群 G に関するゲージ理論において，ゲージ結合定数 g の変化について考察する．ゲージ結合定数を g_G と表記したいところであるが，煩雑になるので添字の G を省略した（$SU(2)_L$ のゲージ結合定数と混同しないようにしよう）．g に関するくりこみ群方程式は

$$\frac{d}{dt}g(t) = \beta(g(t)) \tag{7.20}$$

で与えられる．ここで，$t = \ln\mu$，μ はくりこみ点を表すエネルギースケール

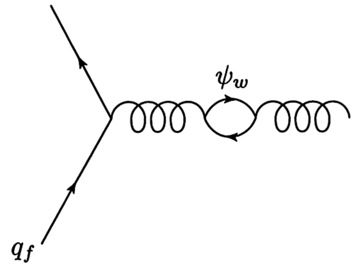


図 7.1　ワイルフェルミオンの寄与.

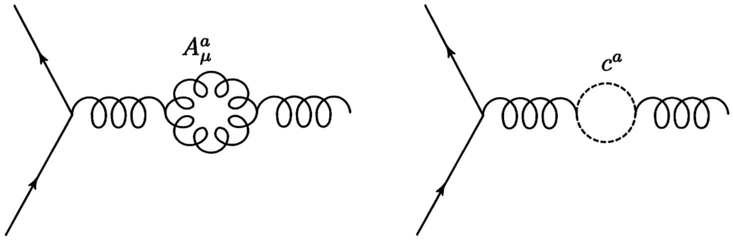


図 7.2　非可換ゲージ場およびファデーエフ・ポポフゴーストの寄与.

である．また，$\beta(g(t))$ は β **関数**とよばれる g を変数とする関数で摂動計算により求められる．具体的には，摂動の 1 ループのレベルで，

$$\beta(g(t)) = \frac{g^3}{16\pi^2}b, \quad b = -\frac{11}{3}C_2(G) + \frac{2}{3}\sum_{\psi_w} T(\boldsymbol{r}_w) + \frac{1}{3}\sum_{\phi_s} T(\boldsymbol{r}_s) \quad (7.21)$$

である（導出は省略，文献 [17]，[19] 参照）．ここで，$C_2(G)$，$T(\boldsymbol{r})$ はカシミール演算子（Casimir operator）の固有値で，$C_2(\boldsymbol{r})$ も含めて，

$$\sum_{c,d=1}^{n} f^{acd} f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}, \quad \sum_{a=1}^{n} (T^a(\boldsymbol{r})T^a(\boldsymbol{r}))_{ij} = C_2(\boldsymbol{r})\delta_{ij},$$
$$\mathrm{tr}(T^a(\boldsymbol{r})T^b(\boldsymbol{r})) = T(\boldsymbol{r})\delta^{ab} \quad (7.22)$$

で与えられる．ここで，$T^a(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ 表現に関する表現行列である．また，ψ_w はワイルフェルミオン場，ϕ_s は複素スカラー場を表す．(7.21) の第 2 式の右辺のそれぞれの項の符号に注意しよう．(7.21) の第 2 式の右辺の第 2 項，第 3 項はそれぞれ ψ_w，ϕ_s からの寄与（図 7.1 参照）で，第 1 項は非可換ゲージ場およびファデーエフ（L. D. Faddeev）・ポポフ（V. N. Popov）ゴーストとよばれる粒子からの寄与（図 7.2 参照）である．ファデーエフ・ポポフゴーストとはゲージ固定の際に必要となる粒子で，スピンは 0 であるが反交換関係で量子化され，フェルミ・ディラック統計に従うという奇妙な性質をもつ．ただし，内線にのみ現れるためユニタリー性は保持される．

$U(1)$ および $SU(N)$ について，b に関する公式を書き下す．

(1) $G = U(1)$ のとき，$C_2(U(1)) = 0$ であるから，

$$b = \frac{2}{3}\sum_{\psi_w} Q(\psi_w)^2 + \frac{1}{3}\sum_{\phi_s} Q(\phi_s)^2 \tag{7.23}$$

となる．ここで，$U(1)$ チャージを Q とした．

(2) $G = SU(N)$ $(N \geq 2)$ のとき，$C_2(SU(N)) = C_2(\boldsymbol{N^2-1}) = N$ で，さらに ψ_w および ϕ_s が $\boldsymbol{N}$ 表現，あるいは $\boldsymbol{N}^*$ 表現に属するとき，$T(\boldsymbol{N}) = T(\boldsymbol{N}^*) = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$b = -\frac{11}{3}N + \frac{1}{3}N_w + \frac{1}{6}N_s \tag{7.24}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{N^2-1}$ は随伴表現を表す．また，N_w はワイルフェルミオン場の数を，N_s は複素スカラー場の数を表す．

1 ループのレベルでのくりこみ群方程式

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{g(t)^3}{16\pi^2}b, \quad \text{すなわち，} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{g(t)^2}\right) = -\frac{b}{2\pi} \tag{7.25}$$

の解は

$$\frac{4\pi}{g(t)^2} = -\frac{b}{2\pi}t + C \quad (C：\text{定数}) \tag{7.26}$$

である．$\alpha_g(\mu) = \dfrac{g(t)^2}{4\pi}$ とすると，

$$\frac{1}{\alpha_g(\mu)} = \frac{1}{\alpha_g(\mu_0)} - \frac{b}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0} \tag{7.27}$$

と表される．さらに，(7.27) を変形して，

$$\alpha_g(\mu) = \frac{\alpha_g(\mu_0)}{1 - \frac{b}{2\pi}\alpha_g(\mu_0)\ln\frac{\mu}{\mu_0}} \tag{7.28}$$

が得られる．

上記の解から，ゲージ結合定数の変化の様子が b の符号の違いにより異なることがわかる．具体的には，$b > 0$ のときは，$\mu > \mu_0$ で $\alpha_g(\mu) > \alpha_g(\mu_0)$ となるため，短距離にいくほど，すなわち，高エネルギーにいくほどゲージ結合定数の値が大きくなる．この性質は電磁気力において**真空偏極**（vacuum polarization）の効果として理解される．例えば，正電荷 $eQ(>0)$ をもつ粒子 ψ^+ が存在したとする．そのまわりに短時間，仮想粒子とその反粒子の対生成が起こり，負電荷をもつ仮想粒子が ψ^+ に引き寄せられ，遠くからみると ψ^+ の電荷が減少してみえる（図 7.3 参照）．また，遠方からじわじわと ψ^+ に近づいていくと電荷の値が増加してみえる．

一方，$b < 0$ のときは，$\mu > \mu_0$ で $\alpha_g(\mu) < \alpha_g(\mu_0)$ となり，短距離（高エネルギー）にいくほどゲージ結合定数の値が小さくなる．このような性質は**漸近的自由性**（asymptotic freedom）とよばれ，非可換ゲージ理論においてグロス（D. J. Gross），ウィルチェック（F. Wilczek），ポリツァ（H. D. Polizer），ト

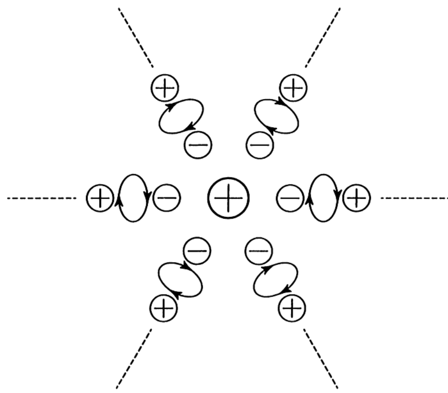


図 7.3　真空偏極.

フーフト（G. 't Hooft）により理論的に導かれた．漸近的自由性は短距離（高いエネルギー）で，ゲージ結合定数に関する摂動論が有効になることを示している．

量子色力学において，ゲージ群は $SU(3)$ でクォークは **3** 表現に属するので，

$$b = -11 + \frac{2}{3}N_q \equiv b_s \tag{7.29}$$

となる．ここで，N_q は質量が μ 以下のクォークの香りの数である．$N_q < \dfrac{33}{2}$ のとき，$b_s < 0$ となり漸近的自由性を有することがわかる．

(7.20) を積分することにより，

$$\Lambda_{\mathrm{QCD}} = \mu \exp\left(-\int \frac{dg}{\beta(g)}\right) \tag{7.30}$$

が導かれる．ここで，Λ_{QCD} は **QCD** スケールとよばれ，1 ループのレベルで，

$$\alpha_s(\mu) = \frac{g_s(t)^2}{4\pi} = -\frac{2\pi}{b_s \ln \frac{\mu}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}}}, \quad \Lambda_{\mathrm{QCD}} = \mu \exp\left(\frac{2\pi}{b_s \alpha_s(\mu)}\right) \tag{7.31}$$

が成り立つ．ちなみに，$\alpha_s(\Lambda_{\mathrm{QCD}}) = \infty$ となる．様々な実験から，$\alpha_s(M_Z)|_{\mathrm{exp}} \fallingdotseq 0.1181$ という値が得られている．また，香りの数を 5，4，3 として，4 ループまでの近似でそれぞれ $\Lambda_{\mathrm{QCD}} \fallingdotseq 210$ MeV，292 MeV，332 MeV が得られている．

7.4　クォークの閉じ込め

色を有する粒子（クォーク，グルーオン）は単独では見つかっていない．この謎について考察する．漸近的自由性とは対照的に，**クォークの閉じ込め**（quark confinement）は長距離（低エネルギー）の物理現象で，そこで g_s の値が大きくなるため，この現象を理解するためには非摂動的な解析が必要となる．

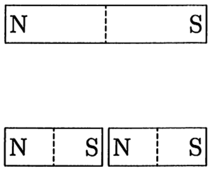


図 7.4　棒磁石の分離.

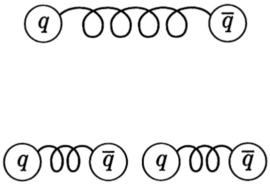


図 7.5　クォークの分離.

7.4.1　類推による予想

まずは，電磁気学の現象との類似に基づいて，クォークの閉じ込めに関する定性的・直感的な理解を試みる.

第 4 章でみたように電磁気学には磁気単極子が存在しない．例えば，棒磁石を切って N 極や S 極を単独で取り出そうとしても，切り口に S 極や N 極が発生して磁気単極子は決して現れない（図 7.4 参照）．これと類似の現象が量子色力学でも起こるとしよう．すなわち，中間子はクォークと反クォークの束縛状態であり，外から十分なエネルギーを加えて引き離したとき，切れ端には必ず反クォークとクォークが対で発生し，単独では取り出すことはできないと考えられる（図 7.5 参照）．バリオンに関しても同様である.

また，完全反誘電体との類似に基づいて，次のような定性的な描像が与えられる．誘電体が存在する場合，電束密度 $\boldsymbol{D}$ は電場 $\boldsymbol{E}$ と分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ を用いて，$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ と表される（図 7.6 参照）．ここで，ε_0，ε はそれぞれ真空，誘電体の誘電率で，通常の誘電体では $\varepsilon > \varepsilon_0$ である．今仮に $\varepsilon = 0$ となる物体があったとし，**完全反誘電体**とよぶことにする．完全反誘電体は電気力線を完全に排除する性質をもち，その中に正電荷と負電荷を置いた場合，両者を結ぶ電気力線は絞られ 1 次元的になり，静電ポテンシャルは距離に比例する．これと類似の現象が量子色力学でも起こるとしよう．すなわち，「量子色力学の真空は色電荷に関して完全反誘電体の状態である」という仮定のもとで，色電気力線を排除する性質をもち，

$$\boldsymbol{D}^a = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^a + \boldsymbol{P}^a = \varepsilon \boldsymbol{E}^a = \boldsymbol{0} \tag{7.32}$$

が成り立つとする（図 7.7 参照）．ここで，$\boldsymbol{D}^a$，$\boldsymbol{E}^a$，$\boldsymbol{P}^a$ はそれぞれ色電束密度，色電場，色分極ベクトルである．このとき，クォークと反クォークの間で両者を結ぶ色電気力線は絞られ 1 次元的になり，距離に比例するポテンシャルが発生し閉じ込めが起こると考えられる（図 7.8 参照）.

さらに，超伝導現象との類似に基づいて，次のような定性的な描像が与えられる．ここで，超伝導状態とはクーパー対とよばれる電子の対が凝縮を起こしてできる状態で超伝導体の電気抵抗は 0 である．また，超伝導体は完全反磁性体になっていて，磁力線が完全に排除される．この性質は**マイスナー効果** (Meissner effect) とよばれる．仮に N 極，S 極のみからなる一対の磁気単極

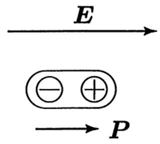


図 7.6　$\varepsilon > \varepsilon_0$ の誘電体.

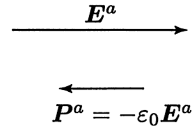


図 7.7　完全反誘電体の状態.

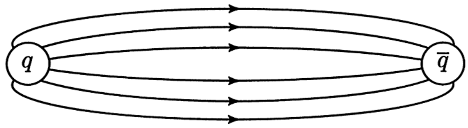


図 7.8　1 次元的に絞られた色電気力線.

子が存在したとすると，それらがつくる磁力線は 1 次元的に絞られる．すなわち，磁気単極子の閉じ込めが起こると予想される．これと類似の現象が量子色力学でも起こるとしよう．すなわち，クォークの閉じ込めを実現するために電気と磁気の役割を逆転させて，「量子色力学の真空は色磁気に関する超伝導状態である」という仮説を立てる．具体的には，色磁気単極子が存在し，その対が凝縮を起こして色磁気に関する超伝導状態が発生し，これが量子色力学の真空状態であるとする．このとき，マイスナー効果の双対版である双対マイスナー効果が現れ，色電荷が完全に排除され，色電荷をもつ粒子がつくる色電気力線が絞られ閉じ込めが起こると考える．

7.4.2　閉じ込めに関する判定基準

「具体的に何を示せば，クォークの閉じ込めが証明されたことになるのか？」という問いかけは意味深長である．ここでは，クォークの閉じ込めが起こるための判定基準を 2 つ紹介する．

7.4.2.1　ウィルソンループに関する面積則

ウィルソンループ（Wilson loop）とは，

$$W(\mathrm{C}) \equiv \mathrm{tr}\left\{\mathrm{P}\exp\left(ig_s \oint_{\mathrm{C}} G_\mu(x)dx^\mu\right)\right\} \tag{7.33}$$

で定義されるゲージ不変量である．ここで，$G_\mu(x) = \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x)T^a$，C は 4 次元時空内の閉曲線（ループ），P は経路順序演算子を表す．

クォークの閉じ込めが起こるためには，ウィルソンループの真空期待値が漸近的に**面積則**

$$\langle W(\mathrm{C})\rangle \sim e^{-k\Sigma(\mathrm{C})} \tag{7.34}$$

に従う必要がある．ここで，k は正の定数，$\Sigma(\mathrm{C})$ は C で囲まれた面積である．

質量 m のクォークと反クォークが距離 R だけ離れて静止しているとする（図 7.9 参照）．クォークと反クォークの束縛状態の時刻 $t=0$ での波動関数と時刻 $t=T$ での波動関数の相関を表す量を評価することにより，T が十分に大きな極限で，

$$\lim_{T\to\infty}\langle W(\mathrm{C})\rangle \sim e^{-TV(R)} \tag{7.35}$$

が導かれる（導出は省略，文献 [40] 参照）．ここで，$V(R)$ はクォークと反クォークの間にはたらくポテンシャルである．ウィルソンループが漸近的に面積則に従う場合，すなわち，$\lim_{T\to\infty}\langle W(\mathrm{C})\rangle \sim e^{-kTR}$ が成り立つ場合，$V(R)$ は R に比例する．これはクォークと反クォークが距離に依らず一定の強さで引き合っていて単独で取り出せないことを意味する．

参考までに，格子ゲージ理論とよばれるゲージ理論の非摂動的定式化を用いて，強結合の極限における $W(\mathrm{C})$ の漸近形として，

$$\langle W(\mathrm{C})\rangle \sim \left(\frac{1}{g_s^2}\right)^{\frac{TR}{a^2}} = \exp\left(-TR\frac{\ln g_s^2}{a^2}\right) \tag{7.36}$$

が導かれる（導出は省略，文献 [40] 参照）．ここで，a は格子間隔である．格子ゲージ理論では時空は離散的なものとして扱われることに注意しよう．ちなみに，$a\to 0$ の極限は連続極限とよばれる．課題は強結合領域におけるクォークの閉じ込めと弱結合領域における漸近的自由性が共存することを示すことである．モンテカルロ法による数値計算により，両者が同じ相で起こることを示唆する結果が得られている．

7.4.2.2 BRS 量子化に基づく定理

1978 年に，九後（T. Kugo）と小嶋（I. Ojima）により BRS 量子化に基づき，カラーの閉じ込めに関する次のような定理が提示された．

【定理】 ファデーエフ・ポポフゴースト場 $c^a(x)$，反ゴースト場 $\bar{c}^a(x)$ を含むグリーン関数

$$\int d^4x e^{ipx}\sum_{c,d=1}^{8}\langle 0|\mathrm{T}(D_\mu c^a(x) g_s f^{bcd} G_\nu^c(0)\bar{c}^d(0))|0\rangle$$
$$= -\left(\eta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)u^{ab}(p^2) \tag{7.37}$$

において，$u^{ab}=-\delta^{ab}$ が成り立つならば，物理的な粒子は BRS1 重項かつ色 1 重項であり，色をもつ粒子は BRS4 重項を組む（証明は省略，文献 [17] 参照）．

この定理において，物理的な粒子を記述する状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ とは**九後・小嶋の補助条件** $Q_\mathrm{B}|\mathrm{phys}\rangle = 0$ を満たす状態のことである．ここで，Q_B は BRS チャージとよばれる保存量である．一方，BRS4 重項は非物理的な粒子の組で，観測されない．課題は $u^{ab}=-\delta^{ab}$ の成立を示すことである．

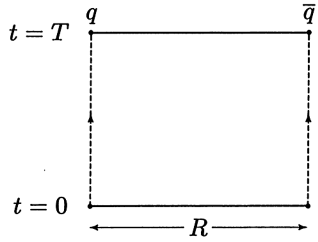


図 7.9 クォークと反クォーク.

参考までに，BRS 量子化について簡単に紹介する．電磁場の量子化の際にも説明したように，ゲージ理論に基づいて物理量を計算するためには，ゲージ固定をする必要がある．ここでは，ローレンツ共変性を尊重して，

$$\partial^\mu G_\mu^a + \xi B^a = 0 \tag{7.38}$$

を選ぶ．ゲージ固定されたラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\rm QCD}^{\rm (tot)} = \mathscr{L}_{\rm QCD} + \mathscr{L}_{\rm GF} + \mathscr{L}_{\rm FP}, \tag{7.39}$$

$$\mathscr{L}_{\rm GF} = \sum_{a=1}^{8} B^a \partial^\mu G_\mu^a + \frac{\xi}{2}\sum_{a=1}^{8} B^a B^a, \tag{7.40}$$

$$\mathscr{L}_{\rm FP} = i\sum_{a=1}^{8} \overline{c}^a \partial^\mu \left(\partial_\mu c^a - g_s \sum_{b,c=1}^{8} f^{abc} G_\mu^b c^c\right) \tag{7.41}$$

で与えられる．ここで，B^a は補助場である．また，$\mathscr{L}_{\rm GF}$ はゲージ固定項，$\mathscr{L}_{\rm FP}$ はファデーエフ・ポポフのゴースト項とよばれる．さらに，ξ はゲージパラメータでゲージ不変量に関する計算結果はこのパラメータに依らない．前節で述べたように c^a，$\overline{c}^a$ はスピンが 0 で反交換関係により量子化されるという奇妙な性質をもつが，内線にのみ現れるためユニタリー性は保持される．

$\mathscr{L}_{\rm QCD}^{\rm (tot)}$ は BRS 対称性とよばれる大局的変換

$$\delta_{\rm B} G_\mu^a = \lambda (D_\mu c)^a = \lambda\left(\partial_\mu c^a - g_s \sum_{b,c=1}^{8} f^{abc} G_\mu^b c^c\right),$$
$$\delta_{\rm B} q_f = i\lambda g_s \sum_{a=1}^{8} c^a T^a q_f, \quad \delta_{\rm B} c^a = -\frac{1}{2}\lambda g_s \sum_{b,c=1}^{8} f^{abc} c^b c^c,$$
$$\delta_{\rm B} \overline{c}^a = i\lambda B^a, \quad \delta_{\rm B} B^a = 0 \tag{7.42}$$

のもとでの不変性を有する．ここで，λ はグラスマン数 (Grassmann number) である．グラスマン数とは互いに反可換な数 ($\lambda\lambda' = -\lambda'\lambda$, $\lambda^2 = 0$) である．(7.42) は **BRS 変換**とよばれ，この変換に関するネーターチャージが BRS チャージ $Q_{\rm B}$ である．ちなみに，BRS はこの対称性の発見者であるベッキ (C. Becchi)，ルエ (A. Rouet)，ストラ (R. Stora) の頭文字である．彼ら

とは独立に発見したテューティン（I. V. Tyutin）を含めて BRS の代わりに BRST を使用する場合もある．

7.5 カイラル対称性の破れ

QCD スケールのあたりでゲージ結合定数の値が大きくなり非摂動効果が顕著になると予想される．具体的には，クォークや反クォークが束縛状態を形成しハドロンが構成されると考えられる．

ハドロンの質量，特にメソンの質量に着目して，QCD スケールのあたりで起こると予想されるクォークからハドロンへの相転移現象に付随するカイラル対称性の破れについて考察する．クォーク模型において，陽子は $p = uud$，中性子は $n = udd$ のようにアップクォーク u とダウンクォーク d で構成されている．表 6.2 より，陽子や中性子は 940 MeV ほどの質量をもつため，単純に考えて，核子内で u や d が 300 MeV ほどの質量を有すると予想される．しかるに，ヒグス機構により u，d が獲得する質量は $m_u \doteqdot 2.2$ MeV，$m_d \doteqdot 4.7$ MeV でけた違いに小さいことがわかる．さらに，不思議なことは，荷電 π 中間子は $\pi^+ = u\overline{d}$，$\pi^- = d\overline{u}$ のように u，d，$\overline{u}$，$\overline{d}$ で構成されているので，$\pi^\pm$ は 600 MeV ほどの質量をもつと予想される．しかるに，表 6.1 より，$\pi^\pm$ の質量は 140 MeV ほどで予想に反してかなり小さいことがわかる．

まずは，(7.18) の $\mathscr{L}_{\text{QCD}}$ が有するクォークのフレーバーに関する近似的な大局的対称性に着目する．ここでは，QCD スケール以下の比較的軽い 3 種類のクォーク $q_f = (u, d, s)$ を扱う．

(A) $m_u = m_d = m_s$ のとき，$SU(3)_V \times U(1)_V$ 変換

$$SU(3)_V: \ q_f(x) \to q'_f(x) = \sum_{f'} \exp\left(i \sum_{a=1}^{8} \theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right)_{ff'} q_{f'}(x), \quad (7.43)$$

$$U(1)_V: \ q_f(x) \to q'_f(x) = e^{i\theta} q_f(x) \quad (7.44)$$

のもとで不変である．ここで，θ^a，θ は実定数である．ネーターカレントは

$$SU(3)_V: \ \mathscr{J}^a_\mu(x) = \sum_{f,f'} \bar{q}_f(x)\gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ff'} q_{f'}(x), \quad (7.45)$$

$$U(1)_V: \ \mathscr{J}_\mu(x) = \sum_{f} \bar{q}_f(x)\gamma_\mu q_f(x) \quad (7.46)$$

である．

(B) $m_u = m_d = m_s = 0$ のとき，$SU(3)_A \times U(1)_A$ 変換

$$SU(3)_A: \ q_f(x) \to q'_f(x) = \sum_{f'} \exp\left(i \sum_{a=1}^{8} \zeta^a \frac{\lambda^a}{2}\gamma_5\right)_{ff'} q_{f'}(x), \quad (7.47)$$

$$U(1)_A: \ q_f(x) \to q'_f(x) = e^{i\zeta\gamma_5} q_f(x) \quad (7.48)$$

のもとで不変である．ここで，ζ^a と ζ は実定数である．ネーターカレントは

$$SU(3)_A: \ \mathscr{J}^a_{5\mu}(x) = \sum_{f,f'} \bar{q}_f(x)\gamma_\mu\gamma_5 \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ff'} q_{f'}(x), \tag{7.49}$$

$$U(1)_A: \ \mathscr{J}_{5\mu}(x) = \sum_{f} \bar{q}_f(x)\gamma_\mu\gamma_5 q_f(x) \tag{7.50}$$

である．$\mathscr{J}^a_{5\mu}(x)$ および $\mathscr{J}_{5\mu}(x)$ は**軸性ベクトルカレント**とよばれ，量子補正により対称性の一部が壊れることが知られている．

クォーク場に関する正準交換関係を用いて，

$$[\mathscr{J}^a_0(\boldsymbol{x},t), \mathscr{J}^b_0(\boldsymbol{y},t)] = i\sum_{c=1}^{8} f^{abc}\mathscr{J}^c_0(\boldsymbol{x},t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$[\mathscr{J}^a_0(\boldsymbol{x},t), \mathscr{J}^b_{50}(\boldsymbol{y},t)] = i\sum_{c=1}^{8} f^{abc}\mathscr{J}^c_{50}(\boldsymbol{x},t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$[\mathscr{J}^a_{50}(\boldsymbol{x},t), \mathscr{J}^b_{50}(\boldsymbol{y},t)] = i\sum_{c=1}^{8} f^{abc}\mathscr{J}^c_0(\boldsymbol{x},t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7.51}$$

が導かれる．ここで，f^{abc} は $SU(3)$ のリー代数の構造定数である．(7.51) は**カレント代数**（current algebra）の交換関係である．

上述の $SU(3)_V \times U(1)_V \times SU(3)_A \times U(1)_A$ 変換はカイラルフェルミオン $q_{fL} = (u_L, d_L, s_L)$，$q_{fR} = (u_R, d_R, s_R)$ に対する $U(3)_L \times U(3)_R$ 変換

$$q_{fL}(x) \to q'_{fL}(x) = \sum_{f'} \exp\left(i\sum_{a=0}^{8}\theta^a_L T^a\right)_{ff'} q_{f'L}(x), \tag{7.52}$$

$$q_{fR}(x) \to q'_{fR}(x) = \sum_{f'} \exp\left(i\sum_{a=0}^{8}\theta^a_R T^a\right)_{ff'} q_{f'R}(x) \tag{7.53}$$

とみなされる．ここで，θ^a_L，θ^a_R は実定数，$T^0 = \dfrac{I}{\sqrt{6}}$ （I：3×3 単位行列），$T^a = \dfrac{\lambda^a}{2}$ （$a = 1, \cdots, 8$）である．カイラルフェルミオンに関するこのような変換は**カイラル変換**，カイラル変換のもとでの不変性は**カイラル不変性**または**カイラル対称性**とよばれる．

ハドロンの世界でもカイラル対称性が近似的に成立するならば，ハドロンは $U(3)_L \times U(3)_R$ の多重項を組むはずである．すなわち，J^P が 0^- および 0^+，$(1/2)^-$ および $(1/2)^+$ のハドロンがそれぞれ近似的に等しい質量をもった形で存在するはずである．ここで，J はスピン，P はパリティを表す．左手型の状態（ψ_L）と右手型の状態（ψ_R）でパリティの値が異なることを思い出そう．しかるに，0^+ や $(1/2)^-$ に対応するハドロンが存在しないので，カイラル対称性は

$$U(3)_L \times U(3)_R \to SU(3)_V \times U(1)_V \tag{7.54}$$

のように自発的に破れていると考えられる．第 6 章で学んだように対称性の自発的破れに伴い南部・ゴールドストーンボソンが出現する．ハドロンの場合，0^- に対応するメソンが南部・ゴールドストーンボソンに相当すると予想される．$m_u, m_d \ll m_s$ なので，$m_u = m_d = 0$ とすると，u と d に関して，

$$U(2)_L \times U(2)_R \to SU(2)_V \times U(1)_V \tag{7.55}$$

が起こり，$SU(2)_A$ の破れに伴う南部・ゴールドストーンボソンが π 中間子 ($\pi^\pm$, π^0) であると考えられる．ゴールドストーンの定理によると，南部・ゴールドストーンボソンの質量は 0 であるが，実際に観測されている π 中間子の質量は 0 ではない．π 中間子の質量の起源はカイラル対称性を明白に破るクォークの質量によると予想される．このようにして，「π 中間子は他のハドロンと比べて，なぜかなり軽いのか？」という疑問に対する回答として，「π 中間子はカイラル対称性の自発的破れに伴う南部・ゴールドストーンボソンである．ただし，クォークの質量の存在により，カイラル対称性は明白に壊れ，π 中間子が質量を獲得する．π 中間子が軽いのは，それらを構成する u, d, $\overline{u}$, $\overline{d}$ の質量が QCD スケールに比べて小さいためである.」が得られる．以下でこの回答に対して，定量的な肉付けを行う．

$SU(3)_A$ に関する軸性ベクトルカレントに関して，場の演算子のレベルで，

$$\partial^\mu \mathscr{J}^a_{5\mu} = f_a m_a^2 \phi^a \tag{7.56}$$

が成り立つ（導出は省略，文献 [40] 参照)．ここで，m_a はメソン ϕ^a の質量，f_a は ϕ^a に関する崩壊定数とよばれるパラメータで荷電 π 中間子の場合，崩壊過程 $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$, $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ から $f_\pi \doteqdot 93$ MeV であることが知られている．(7.56) は **PCAC 仮説**とよばれる関係式である．PCAC とは部分的に保存する軸性ベクトルカレントを意味する Partially Conserved Axial vector Current の略である．アイソスピン対称性を考慮して，(7.56) などを用いて，

$$f_{\pi^\pm}^2 m_{\pi^\pm}^2 = -\frac{m_u + m_d}{2}\langle 0|\bar{u}u + \bar{d}d|0\rangle, \tag{7.57}$$

$$f_{\pi^0}^2 m_{\pi^0}^2 = -m_u\langle 0|\bar{u}u|0\rangle - m_d\langle 0|\bar{d}d|0\rangle, \tag{7.58}$$

$$f_{K^\pm}^2 m_{K^\pm}^2 = -\frac{m_u + m_s}{2}\langle 0|\bar{u}u + \bar{s}s|0\rangle, \tag{7.59}$$

$$f_{K^0}^2 m_{K^0}^2 = f_{\bar{K}^0}^2 m_{\bar{K}^0}^2 = -\frac{m_d + m_s}{2}\langle 0|\bar{d}d + \bar{s}s|0\rangle, \tag{7.60}$$

$$f_{\eta^0}^2 m_{\eta^0}^2 = -\frac{m_u + m_d}{6}\langle 0|\bar{u}u + \bar{d}d|0\rangle - \frac{4m_s}{3}\langle 0|\bar{s}s|0\rangle \tag{7.61}$$

が得られる（導出は省略，文献 [40] 参照)．$SU(3)_V$ は自発的には壊れないので，

$$\langle 0|\bar{u}u|0\rangle = \langle 0|\bar{d}d|0\rangle = \langle 0|\bar{s}s|0\rangle = -\Lambda^3 \neq 0 \tag{7.62}$$

が成り立つとする．$\Lambda \neq 0$ は $SU(3)_A$ の破れを意味する．$\overline{u}u + \overline{d}d + \overline{s}s$ は

$SU(3)_V$ 変換のもとで不変であるが，$SU(3)_A$ 変換のもとでは不変でないことに注意しよう．また，崩壊定数の間に $f_{\pi^\pm} = f_{\pi^0} = f_{K^\pm} = f_{K^0} = f_{\bar{K}^0} = f_{\eta^0} \equiv f_\pi$ が成り立つとする．このとき，(7.57)〜(7.61) から，

$$m_{\pi^\pm}^2 = m_{\pi^0}^2 = (m_u + m_d)\frac{\Lambda^3}{f_\pi^2}, \tag{7.63}$$

$$m_{K^\pm}^2 = (m_u + m_s)\frac{\Lambda^3}{f_\pi^2}, \quad m_{K^0}^2 = m_{\bar{K}^0}^2 = (m_d + m_s)\frac{\Lambda^3}{f_\pi^2}, \tag{7.64}$$

$$m_{\eta^0}^2 = \frac{m_u + m_d + 4m_s}{3}\frac{\Lambda^3}{f_\pi^2} \tag{7.65}$$

が導かれる．(7.63)〜(7.65) から，クォークの質量が 0 のとき，メソンの質量も 0 になることがわかる．また，Λ として QCD スケールのあたりの値 $\Lambda = 250$ MeV を選び，$f_\pi \doteqdot 93$ MeV とすると，表 6.1 に挙げたメソンの質量の値がある程度再現される．また，m_u と m_d の違いを考慮して，

$$\frac{m_d}{m_u} = \frac{m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 - m_{\pi^0}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 - 2m_{\pi^0}^2} \doteqdot 1.7 \tag{7.66}$$

が得られ，$m_{K^0} > m_{K^+}$ の原因が $m_d > m_u$ であることがわかる．さらに，$m_u = m_d$ として，m_s の値が

$$\frac{m_u + m_d}{2m_s} = \frac{m_{\pi^+}^2}{2m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2} \doteqdot 0.04 \tag{7.67}$$

のように概算される．このようにして，s は u や d に比べて 25 倍ほど重いことがわかる．参考までに，カレント代数に基づく精密な計算により，$m_u \doteqdot 2.2$ MeV，$m_d \doteqdot 4.7$ MeV，$m_s \doteqdot 96$ MeV が得られ，これらの値は $\Lambda_{\text{QCD}} \doteqdot 332$ MeV（香りの数を 3 とした）に比べて小さいため，カイラル対称性はよい近似で成立している．

ラグランジアン密度に現れるヒグス機構により獲得されたクォークの質量は**カレントクォーク質量**（current quark mass）とよばれる．一方，ハドロン内に束縛されているクォークの有効質量 m_f^{eff} は**構成子クォーク質量**（constituent quark mass）とよばれる．m_f^{eff} を用いて，バリオン ($B_{ff'f''} = q_f q_{f'} q_{f''}$)，重いメソン ($M_{ff'} = q_f \bar{q}_{f'}$) の質量はそれぞれ

$$m(B_{ff'f''}) = m_f^{\text{eff}} + m_{f'}^{\text{eff}} + m_{f''}^{\text{eff}} + a\sum_{(i,j)} \frac{\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j}{m_i^{\text{eff}} m_j^{\text{eff}}}, \tag{7.68}$$

$$m(M_{ff'}) = m_f^{\text{eff}} + m_{f'}^{\text{eff}} + b\frac{\boldsymbol{\sigma}_f \cdot \boldsymbol{\sigma}_{f'}}{m_f^{\text{eff}} m_{f'}^{\text{eff}}} \tag{7.69}$$

のように近似的に表される．ここで，$i, j = f, f', f''$，$\boldsymbol{\sigma}_f$ は q_f に作用するパウリ行列である．(7.68) および (7.69) の右辺の最後の項はスピン・スピン相互作用によるもので，a，b は正の定数である．

7.6 振り返りと見通し

「g_3，$\not{G}$，$G_{\mu\nu}$ は何を表しているのか？」という問いかけに対する答えを求めて，強い相互作用の解明を軸にして，

$$\mathscr{L}_{\rm QCD} = \sum_{f=1}^{n_q} \overline{q}_f(x) \left\{ i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_s \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \right) - m_f \right\} q_f(x)$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{8} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} \sum_{a=1}^{8} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \tag{7.70}$$

で記述される量子色力学とよばれる理論に到達した．素粒子の標準数式の 1 行目と 4 行目を合わせたもの

$$\overline{\psi} i \not{\partial} \psi - g_3 \overline{\psi} \not{G} \psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \tag{7.71}$$

と見比べると，$m_f = 0$，$\theta = 0$ および定義式を含む対応関係

$$\psi \ \leftrightarrow \ q_f, \ \ \not{\partial} \ \leftrightarrow \ \gamma^\mu \partial_\mu, \ \ g_3 \ \leftrightarrow \ g_s,$$

$$\not{G} \ \leftrightarrow \ \gamma^\mu G_\mu, \ \ G_\mu \equiv \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2}, \ \ G_{\mu\nu} \ \leftrightarrow \ G_{\mu\nu}^a \tag{7.72}$$

のもとで両者が完全に一致することがわかる．すなわち，(7.71) はクォークにはたらく強い相互作用の物理を暗号化したものと考えられる．

最後に $m_f = 0$ および $\theta = 0$ についてコメントする．前にも述べたように，(7.70) に m_f が含まれているのは，ヒグス機構によりクォークが質量を獲得したのちの強い相互作用の物理を記述しているからである．θ に関しては，中性子の双極子モーメントの実験から $|\theta| < 10^{-9}$ であることが知られている．すなわち，強い相互作用による P および CP 不変性の破れは観測されていない．ここで，「θ の値はなぜこんなにも小さいのか？」という問題が生じる．これは**強い CP 問題**とよばれる微調整問題の一種である．

第 8 章
素粒子の標準模型

素粒子の標準模型を概観したのち，小林・益川模型およびニュートリノに関する物理について考察する．さらに，標準模型に関する様々な謎を紹介する．

8.1 標準模型

電弱理論と量子色力学を組み合わせることにより，弱い相互作用と強い相互作用をゲージ相互作用として含むラグランジアン密度

$$\mathscr{L}_{\mathrm{SM}} = \mathscr{L}_{\mathrm{M}} + \mathscr{L}_{\mathrm{G}} + \mathscr{L}_{\mathrm{Y}} + \mathscr{L}_{\mathrm{H}} + \mathscr{L}_{\theta}, \tag{8.1}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{M}} = \sum_j \overline{\psi}_j i\gamma^\mu D_\mu \psi_j, \tag{8.2}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{G}} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{Y}} = \sum_{A,B=1}^{n_g} \Big(& y^{(e)}_{AB}\bar{l}_{LA}\Phi e_{RB} + y^{(\nu)}_{AB}\bar{l}_{LA}\tilde{\Phi}\nu_{RB} \\ & + y^{(d)}_{AB}\overline{q}_{LA}\Phi d_{RB} + y^{(u)}_{AB}\overline{q}_{LA}\tilde{\Phi} u_{RB} + \mathrm{h.c.}\Big),\end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{H}} = (D_\mu \Phi(x))^\dagger D^\mu \Phi(x) + \mu^2|\Phi(x)|^2 - \lambda|\Phi(x)|^4, \tag{8.5}$$

$$\mathscr{L}_{\theta} = \frac{\theta}{32\pi^2}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^{a\mu\nu} \tag{8.6}$$

が得られる．ここで，共変微分は

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_s\sum_{a=1}^{8} G^a_\mu(x)T^a_C + ig\sum_{a=1}^{3} W^a_\mu(x)T^a_L + ig' B_\mu(x)Y \tag{8.7}$$

で与えられる．ゲージ結合定数および生成子は表 8.1 の表記法に基づく．生成子に関して，$SU(3)_C$ の $\mathbf{3}$ 表現に対しては $T^a_C = \dfrac{\lambda^a}{2}$，$SU(2)_L$ の $\mathbf{2}$ 表現に対しては $T^a_L = \dfrac{\tau^a}{2}$ をあてがう．第 1 世代の物質粒子のゲージ量子数を表 8.2 に

表 8.1　標準模型のゲージ群，ゲージ結合定数，ゲージ粒子．

ゲージ群	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
ゲージ結合定数	g_s	g	g'
ゲージ粒子	$G^a_\mu(x)$ $(a=1\sim 8)$	$W^a_\mu(x)$ $(a=1\sim 3)$	$B_\mu(x)$
生成子	T^a_C	T^a_L	Y

表 8.2　第 1 世代の物質粒子に関するゲージ量子数．

物質粒子	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	T^3_L	Y	Q
$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
u_R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$l_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
e_R	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	-1	-1
ν_{eR}	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	0	0

記載する．ゲージ量子数の間に $Q = T^3_L + Y$ という関係が成立する．ここで，（ニュートリノに関する様々な観測結果を踏まえて）右手型のニュートリノ ν_{eR} を導入している．第 2 世代，第 3 世代の物質粒子も同様のゲージ量子数をもち，それぞれの粒子は表 8.3 のように表記される．また，ゲージ粒子のゲージ量子数を表 8.4 に記載する．表 8.4 において，W^a_μ $(a=1,2,3)$ の代わりに，

$$W^\pm_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W^1_\mu \mp iW^2_\mu\right), \quad W^0_\mu \equiv W^3_\mu \tag{8.8}$$

表 8.3　3 世代の物質粒子．

	第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代
クォーク	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$
	u_R	c_R	t_R
	d_R	s_R	b_R
レプトン	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$
	e_R	μ_R	τ_R
	ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$

表 8.4　ゲージ粒子に関するゲージ量子数.

ゲージ粒子	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	T_L^3	Y	Q
G_μ^a	**8**	**1**	0	0	0
$\begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^0 \\ W_\mu^- \end{pmatrix}$	**1**	**3**	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
B_μ	**1**	**1**	0	0	0

表 8.5　ヒグス 2 重項に関するゲージ量子数.

ヒグス 2 重項	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	T_L^3	Y	Q
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	**1**	**2**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} -\phi^{0*} \\ \phi^- \end{pmatrix}$	**1**	**2**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

を用いた．ヒグス 2 重項 Φ はスピン 0 の粒子で表 8.5 のようなゲージ量子数をもつ．$\tilde{\Phi}(= i\tau^2\Phi^*)$ は Φ の反粒子に相当する場である（(6.67) 参照).

表 8.2，表 8.5 を用いて，物質粒子およびヒグス 2 重項に関する共変微分は

$$D_\mu q_L = \left(\partial_\mu + ig_s \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x)\frac{\lambda^a}{2} + ig \sum_{a=1}^{3} W_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2} + i\frac{1}{6}g' B_\mu(x)\right) q_L, \tag{8.9}$$

$$D_\mu u_R = \left(\partial_\mu + ig_s \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x)\frac{\lambda^a}{2} + i\frac{2}{3}g' B_\mu(x)\right) u_R, \tag{8.10}$$

$$D_\mu d_R = \left(\partial_\mu + ig_s \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x)\frac{\lambda^a}{2} - i\frac{1}{3}g' B_\mu(x)\right) d_R, \tag{8.11}$$

$$D_\mu l_L = \left(\partial_\mu + ig \sum_{a=1}^{3} W_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2} - i\frac{1}{2}g' B_\mu(x)\right) l_L, \tag{8.12}$$

$$D_\mu e_R = \left(\partial_\mu - ig' B_\mu(x)\right) e_R, \tag{8.13}$$

$$D_\mu \nu_{eR} = \partial_\mu \nu_{eR}, \tag{8.14}$$

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu + ig \sum_{a=1}^{3} W_\mu^a(x)\frac{\tau^a}{2} + i\frac{1}{2}g' B_\mu(x)\right) \Phi \tag{8.15}$$

のように決まる．さらに，$\mathscr{L}_{\rm SM}$ が量子色力学を正しく含んでいることは以下のようにして理解される．ヒグス機構により，物質粒子，弱い相互作用を媒介するゲージ粒子（$W^\pm$，Z^0），ヒグス 2 重項の中の生き残りであるヒグス粒子 (h) が質量を獲得したのち，弱い相互作用と電磁相互作用のスイッチを切ったとする．そのとき，質量 m_f をもつ（n_q 種類の）クォーク q_f に関して，

$$\mathscr{L}_{\text{strong}} = \sum_{f=1}^{n_q} \overline{q}_f(x) \left\{ i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_s \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \right) - m_f \right\} q_f(x)$$
$$-\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{8} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} \sum_{a=1}^{8} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \tag{8.16}$$

が残る．(8.16) において，q_f はディラックフェルミオンで，ヒグス機構により u_L と u_R が組になってディラックフェルミオンを構成することを思い出そう．$\mathscr{L}_{\text{strong}}$ はまさに量子色力学のラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\text{QCD}}$ そのものである．

再確認のために，「(8.2) ～ (8.6) を必要な情報を残しつつ可能な限り簡略な形で表記しなさい」という課題が与えられたとしよう．以下のような簡略化の措置（そち）が考えられる．

- 物質粒子の種類（世代の違いを含む）を区別するための添字 j，A，B およびゲージ粒子の多重項を表す添字 a を部分的に省略・変更する．
- 3 種類のゲージ粒子が物質粒子とどのような形で相互作用するかを明確に記載する．
- ファインマンの表記法（$\gamma^\mu V_\mu$ を $\not{V}$ と表記する）を用いて，γ 行列を省略する．
- ヒグス 2 重項の自己相互作用が実験により確認されていない現状を踏まえて，ヒグスポテンシャルの形は明記せずに $V(\phi)$ と記載する．
- 0 とは異なる θ の値が実験により確認されていないことを考慮して，θ 項を記載しない．

これらを実行することにより，

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \ & \overline{\psi} i \not{\partial} \psi \\ & -g_1 \overline{\psi} \not{B} \psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & -g_2 \overline{\psi} \not{W} \psi - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \\ & -g_3 \overline{\psi} \not{G} \psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \\ & +\overline{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + \text{h.c.} \\ & +|D_\mu \phi|^2 - V(\phi)\end{aligned} \tag{8.17}$$

が得られる．このようにして，(8.2)～(8.6) の簡略形が素粒子の標準数式であることが納得できたであろう．

素粒子の標準数式に基づいて以前に提示した問いかけ

- 万物の根源は何か？
- 万物の根源が従う原理や法則は何か？
- いかにして記述するか？

に対して，素粒子の標準模型による以下のような回答が得られる．

- 基本的な構成要素はクォークとレプトンとよばれる物質粒子（その一部が

身のまわりの物質を構成している)，力を伝えるはたらきをするゲージボソン，真空状態を決めるはたらきをするヒグス **2** 重項から成る．

- 基本的な構成要素は相対論および量子論の原理や基本法則に従う．
- **標準模型**とよばれる**ゲージ場の量子論**により記述される．

ここで，再度，標準模型の構造を掻い摘んで述べると以下のようになる．標準模型とは 3 世代のクォークとレプトンを物質粒子とするゲージ群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づくゲージ場の量子論で，$SU(3)_C$ 対称性に関する部分は強い相互作用を記述し，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性に関する部分はヒグス機構により自発的に $U(1)_{\mathrm{EM}}$ に壊れる（壊れずに生き残る部分が電磁相互作用に相当し，壊れた部分が弱い相互作用に相当する）という性質を内包した理論である．ここで，ヒグス機構とはヒグス 2 重項の一部が真空期待値

$$\langle 0|\phi^0|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \neq 0 \tag{8.18}$$

を得ることにより，ゲージ対称性の自発的破れ

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{\mathrm{EM}} \tag{8.19}$$

が起こり，粒子に質量が付与される機構である．質量公式は

$$m_f = \frac{y_f}{\sqrt{2}}v, \quad M_W = \frac{1}{2}gv, \quad M_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}\, v, \quad m_h = \sqrt{2\lambda}v \tag{8.20}$$

で与えられる．ここで，m_f，M_W，M_Z，m_h はそれぞれ物質粒子，荷電ウィークボソン ($W_\mu^\pm$)，中性ウィークボソン (Z_μ)，物理的なヒグス粒子 (h) の質量で，すべて v に比例していることに注目しよう．y_f は湯川結合定数 $y_{AB}^{(X)}$ から得られる固有値である．様々な実験から得られた標準模型の粒子の質量を表 8.6 に挙げる．表 8.6 において，実験誤差の記載を省略した．u，d，s に関してはカレントクォーク質量，c，b に関してはランニング質量とよばれるものを用いた．参考までに，表 8.6，$m_f = \dfrac{y_f}{\sqrt{2}}v$，$v \doteqdot 246$ GeV を用いて，湯川結合定数の値を概算すると，

表 8.6　標準模型の粒子の質量．

クォーク	質量	レプトン	質量	ゲージ粒子	質量
u	2.2 MeV	ν_e	?	G_μ^α	0
d	4.7 MeV	e^-	0.511 MeV	$W_\mu^\pm$	80.385 GeV
c	1.27 GeV	ν_μ	?	Z_μ	91.1876 GeV
s	96 MeV	μ^-	105.66 MeV	A_μ	0
t	173.21 GeV	ν_τ	?	ヒグス粒子	質量
b	4.18 GeV	τ^-	1776.86 MeV	h	125.09 GeV

$$y_u \doteqdot 1.26 \times 10^{-5}, \quad y_c \doteqdot 7.3 \times 10^{-3}, \quad y_t \doteqdot 0.996, \tag{8.21}$$

$$y_d \doteqdot 2.70 \times 10^{-5}, \quad y_s \doteqdot 5.5 \times 10^{-4}, \quad y_b \doteqdot 2.4 \times 10^{-2}, \tag{8.22}$$

$$y_e \doteqdot 2.94 \times 10^{-6}, \quad y_\mu \doteqdot 6.07 \times 10^{-4}, \quad y_\tau \doteqdot 1.02 \times 10^{-2} \tag{8.23}$$

となる．ニュートリノの質量に関しては未定なので，「?」と記した．宇宙論的・天文学的な観測を含む様々な実験より，

$$\sum_A m_{\nu_A} \leq O(10^{-1} \sim 1)\ \text{eV} \tag{8.24}$$

という制限が得られている．今仮に，あるニュートリノに対して $m_\nu \leq 0.5$ eV とすると，$y_\nu \leq 2.87 \times 10^{-12}$ となり，次のような不等式が得られる．

$$\frac{y_\nu}{y_e} \leq 0.976 \times 10^{-6}. \tag{8.25}$$

8.2 小林・益川模型

6.5.2 項で電弱理論に基づいて，クォークが 2 世代存在する場合のクォーク混合について考察した．実際には 3 世代の物質粒子の存在が確認されている．この節では，クォークの湯川相互作用項に関する物理について考察する．

8.2.1 クォーク混合

一般性をもたせて，n_g 世代のクォーク

$$q_{LA} = \begin{pmatrix} u_{LA} \\ d_{LA} \end{pmatrix}, \quad u_{RA}, \quad d_{RA} \quad (A = 1, 2, \cdots, n_g) \tag{8.26}$$

が存在する場合を考える．クォークに関する湯川相互作用項

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}^{(q)} = \sum_{A,B} \left(y_{AB}^{(d)} \overline{q}_{LA} \Phi d_{RB} + y_{AB}^{(u)} \overline{q}_{LA} \tilde{\Phi} u_{RB} + \text{h.c.} \right) \tag{8.27}$$

に対して，ヒグス 2 重項が真空期待値をもつことにより，

$$\sum_{A,B} \left(\frac{y_{AB}^{(d)}}{\sqrt{2}} v \overline{d}_{LA} d_{RB} + \frac{y_{AB}^{(u)}}{\sqrt{2}} v \overline{u}_{LA} u_{RB} + \text{h.c.} \right) \tag{8.28}$$

のような質量項が生じる．これらの項は 2 種類のユニタリー行列 S_X，T_X $(X = d, u)$ を用いて，

$$\sum_{C,D} (S_X^\dagger)_{AC} \left(\frac{y_{CD}^{(X)}}{\sqrt{2}} v \right) (T_X)_{DB} = m_{X_A} \delta_{AB} \tag{8.29}$$

のように対角化され，その固有値 m_{X_A} がクォークの質量パラメータになる．

ゲージ対称性の固有状態 $\psi^{(W)}$ と質量の固有状態 $\psi^{(M)}$ は S_X，T_X による

ユニタリー変換

$$d_{LA}^{(W)} = \sum_B (S_d)_{AB} d_{LB}^{(M)},\ d_{RA}^{(W)} = \sum_B (T_d)_{AB} d_{RB}^{(M)},$$
$$u_{LA}^{(W)} = \sum_B (S_u)_{AB} u_{LB}^{(M)},\ u_{RA}^{(W)} = \sum_B (T_u)_{AB} u_{RB}^{(M)} \tag{8.30}$$

により関係付けられる．このとき，クォークに関する荷電カレントは

$$j_{(q)}^{+\mu} = \sum_A \overline{q}_{LA}^{(W)} \gamma^\mu \tau^+ q_{LA}^{(W)} = \sum_A \overline{u}_{LA}^{(W)} \gamma^\mu d_{LA}^{(W)}$$
$$= \sum_{A,B} \overline{u}_{LA}^{(M)} \gamma^\mu (S_u^\dagger S_d)_{AB} d_{LB}^{(M)} \tag{8.31}$$

のように書き換えられる．ここで，$V_{\rm KM} \equiv S_u^\dagger S_d$ は**小林・益川行列** (Kobayashi-Maskawa matrix)，あるいは**カビボ・小林・益川行列**とよばれるユニタリー行列で，$n_g = 2$ の場合のカビボ行列の拡張版である．

8.2.2 K 中間子に関する CP 不変性の破れ

CP 変換について紹介する．4.2 節でみたようにカイラル表示

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},\ \ \sigma^\mu \equiv (I, \boldsymbol{\sigma}),\ \ \overline{\sigma}^\mu \equiv (I, -\boldsymbol{\sigma}) \tag{8.32}$$

において，ディラックフェルミオンは空間反転（パリティ変換）のもとで，

$$P : \psi(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} \xi(\boldsymbol{x}, t) \\ \eta^*(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix} \to \psi'(-\boldsymbol{x}, t) = e^{i\theta_{\rm P}} \begin{pmatrix} \eta^*(\boldsymbol{x}, t) \\ \xi(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix} \tag{8.33}$$

のように変換する（(4.110) 参照）．また，荷電共役変換のもとで，

$$C : \psi(\boldsymbol{x}, t) \to \psi^c(\boldsymbol{x}, t) = e^{i\theta_{\rm c}} \begin{pmatrix} \sigma^2 \eta(\boldsymbol{x}, t) \\ -\sigma^2 \xi^*(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix} \tag{8.34}$$

のように変換する（4.121 参照）．さらに，空間反転と荷電共役変換を合成した変換は **CP 変換**とよばれ，ディラックフェルミオンに対して，

$$CP : \psi(\boldsymbol{x}, t) \to \psi_{\rm CP}(-\boldsymbol{x}, t) = e^{i\theta_{\rm c}} e^{i\theta_{\rm P}} \begin{pmatrix} \sigma^2 \xi^*(\boldsymbol{x}, t) \\ -\sigma^2 \eta(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix} \tag{8.35}$$

で定義される．

6.1 節でみたように，中性 K 中間子 K^0，$\overline{K}^0$ はクォークと反クォークの束縛状態 $K^0 = d\overline{s}$，$\overline{K}^0 = s\overline{d}$ である．K^0 が 1 個存在する状態を $|K^0\rangle$，$\overline{K}^0$ が 1 個存在する状態を $|\overline{K}^0\rangle$ とする．K^0 と $\overline{K}^0$ はいずれも擬スカラー粒子なので，空間反転のもとで符号を変える．すなわち，

$$P|K^0\rangle = -|K^0\rangle,\ \ P|\overline{K}^0\rangle = -|\overline{K}^0\rangle \tag{8.36}$$

が成り立つ．荷電共役変換により，d と $\overline{d}$，s と $\overline{s}$ が入れ替わるので，K^0 と $\overline{K}^0$ が入れ替わる．よって，位相の任意性を利用して，

$$C|K^0\rangle = -|\overline{K}^0\rangle, \quad C|\overline{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \tag{8.37}$$

と選ぶ．このとき，CP 変換のもとで，$|K^0\rangle$，$|\overline{K}^0\rangle$ はそれぞれ

$$CP|K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle, \quad CP|\overline{K}^0\rangle = |K^0\rangle \tag{8.38}$$

と変換する．

K^0 のストレンジネス（S）は 1 で，$\overline{K}^0$ の S は -1 である．強い相互作用において S は保存されるが，弱い相互作用においては保存されないため，弱い相互作用を通じて，K^0 と $\overline{K}^0$ の遷移や混合が起こると予想される．これに伴い，混合状態

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle\right), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle\right) \tag{8.39}$$

が重要になる．ここで，$|K_1\rangle$，$|K_2\rangle$ は CP 変換のもとで，

$$CP|K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle \tag{8.40}$$

を満たし，それぞれ固有値 1，-1 の固有状態である．

実験により，中性 K 中間子は 2 個，あるいは 3 個の π 中間子（$\pi^0+\pi^0$，$\pi^+ + \pi^-$，$\pi^0+\pi^0+\pi^0$，$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$）に崩壊することが知られている．崩壊後の $\pi^0+\pi^0$，$\pi^+ + \pi^-$ は CP に関する固有値 1 の固有状態である．一方，$\pi^0+\pi^0+\pi^0$，$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ については，その大部分が CP に関する固有値 -1 の固有状態である．もし仮に，中性の K 中間子の崩壊において，CP 不変性が保持されるならば，

$$K_1 \to \pi^0+\pi^0, \quad \pi^+ + \pi^-, \quad \cdots, \tag{8.41}$$

$$K_2 \to \pi^0+\pi^0+\pi^0, \quad \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \tag{8.42}$$

が成り立つと予想される．(8.41) の $\cdots$ は，極めて小さな割合（10^{-7} %ほど）で CP に関する固有値 1 の状態であるような 3 個の π 中間子に崩壊する過程を表す．さらに，場の量子論を用いて，「一般に 3 個の粒子に崩壊するよりも 2 個の粒子に崩壊する方が起こりやすいこと」および「粒子の寿命は崩壊が起こる確率に反比例すること」が導かれる．よって，K_1 の方が K_2 よりも寿命が短いと予想される．実際に，(8.41) のような崩壊を起こす粒子は K_S^0 とよばれ，その寿命は $\tau(K_S^0) \fallingdotseq 0.9\times10^{-10}$ s で，(8.42) のような崩壊を起こす粒子は K_L^0 とよばれ，その寿命は $\tau(K_L^0) \fallingdotseq 5.1\times10^{-8}$ s である．

弱い相互作用において CP 不変性が保持されるならば，すなわち，弱い相互作用を記述する（有効的な）ハミルトニアン $H_{\rm w}$ が CP 変換のもとで不変である（$(CP)H_{\rm w}(CP)^{-1} = H_{\rm w}$）ならば，CP に関する固有状態は時間発展し

ても固有状態のままである．しかるに，精密な測定を行うと，K_L^0（CP の -1 の状態）から $\pi^0+\pi^0$，$\pi^+ + \pi^-$（CP の 1 の状態）への崩壊がほんのわずか (0.3 %ほど) 起こることがわかる．これは K_L^0 が CP に関する厳密な固有状態ではなくて，K_1 がほんのわずか混ざった状態

$$K_L^0 = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon_L|^2+1}}(\varepsilon_L K_1 + K_2), \quad |\varepsilon_L| \ll 1 \tag{8.43}$$

であること，さらにこのような混合状態は $H_{\rm W}$ により生じ，$H_{\rm W}$ が CP 変換のもとで不変ではないことを意味する．ε_L が CP 不変性の破れを表すパラメータで，この起源の解明が課題となる．

8.2.3 標準模型における CP 不変性の破れ

標準模型において，CP 不変性を破る可能性があるのは，荷電カレント $j_{(q)}^{\pm\mu}$ と荷電ウィークボソン $W_\mu^\pm$ の間の相互作用項（$\mathscr{L}_{\rm CC}$ と記す）である．質量の固有状態を用いて，$\mathscr{L}_{\rm CC}$ に関する相互作用ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\int \mathscr{L}_{\rm CC} d^3x &= -\int \frac{g}{\sqrt{2}} j_{(q)}^{+\mu}(\boldsymbol{x},t) W_\mu^+(\boldsymbol{x},t) d^3x + \text{h.c.} \\ &= -\int \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{A,B} \overline{u}_{LA}^{(M)}(\boldsymbol{x},t)\gamma^\mu (V_{\rm KM})_{AB} d_{LB}^{(M)}(\boldsymbol{x},t) W_\mu^+(\boldsymbol{x},t) d^3x \\ &\quad + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{8.44}$$

と表される．ここで，エルミート共役（h.c.）を具体的に記載すると，

$$\begin{aligned}\text{h.c.} &= -\int \frac{g}{\sqrt{2}} j_{(q)}^{-\mu}(\boldsymbol{x},t) W_\mu^-(\boldsymbol{x},t) d^3x \\ &= -\int \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{A,B} \overline{d}_{LA}^{(M)}(\boldsymbol{x},t)\gamma^\mu (V_{\rm KM}^\dagger)_{AB} u_{LB}^{(M)}(\boldsymbol{x},t) W_\mu^-(\boldsymbol{x},t) d^3x\end{aligned} \tag{8.45}$$

である．

$\overline{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_2$ および $W_\mu^\pm$ は CP 変換のもとで，

$$\overline{\psi}_1(\boldsymbol{x},t)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_2(\boldsymbol{x},t) \to -\overline{\psi}_2(\boldsymbol{x},t)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_1(\boldsymbol{x},t), \tag{8.46}$$

$$W_\mu^\pm(\boldsymbol{x},t) \to -W^{\mp\mu}(\boldsymbol{x},t) \tag{8.47}$$

のように変換する（$(\Lambda_{\rm S})^\mu{}_\nu$ および $(\Lambda_{\rm S})_\mu{}^\nu$ を反映して，添字 μ の位置が変化していることに注意しよう）ので，(8.45) は CP 変換のもとで，

$$\begin{aligned}&-\int \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{A,B} \overline{u}_{LB}^{(M)}(\boldsymbol{x},t)\gamma_\mu (V_{\rm KM}^\dagger)_{AB} d_{LA}^{(M)}(\boldsymbol{x},t) W^{+\mu}(\boldsymbol{x},t) d^3x \\ &= -\int \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{A,B} \overline{u}_{LB}^{(M)}(\boldsymbol{x},t)\gamma_\mu (V_{\rm KM}^*)_{BA} d_{LA}^{(M)}(\boldsymbol{x},t) W^{+\mu}(\boldsymbol{x},t) d^3x\end{aligned} \tag{8.48}$$

に変換する．ここで，$(V_{\rm KM}^\dagger)_{AB} = (V_{\rm KM}^*)_{BA}$ を用いている．よって，(8.44) は CP 変換のもとで，

$$\int \mathscr{L}'_{\rm CC} d^3x = -\int \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{A,B} \overline{u}^{(M)}_{LA}(\boldsymbol{x},t)\gamma^\mu (V^*_{\rm KM})_{AB} d^{(M)}_{LB}(\boldsymbol{x},t) W^+_\mu(\boldsymbol{x},t) d^3x + \text{h.c.} \tag{8.49}$$

に変換する．従って，$V_{\rm KM}$ **が物理的な複素位相を含む場合，すなわち，$(V^*_{\rm KM})_{AB} \neq (V_{\rm KM})_{AB}$ のとき，CP 不変性が壊れることがわかる**．ここで，物理的な複素位相とはクォーク場に関する位相の再定義により取り除くことのできない位相のことで，それが存在するための条件を以下で調べる．

n_g 世代の $V_{\rm KM}$ に関して，独立な自由度を数える．$V_{\rm KM}$ は $n_g \times n_g$ ユニタリー行列なので，n_g^2 個の実数の自由度が存在する．このうち，クォーク場の位相の再定義により，$2n_g - 1$ 個の自由度が取り除かれる．具体的には，$\int \mathscr{L}_{\rm CC} d^3x$ の中で，$V_{\rm KM}$ は $\overline{u}^{(M)}_{LA}(V_{\rm KM})_{AB} d^{(M)}_{LB}$ の形で現れる．小林・益川行列の各成分に関して極表示 $(V_{\rm KM})_{AB} = R_{AB}e^{i\delta_{AB}}$ を用いることにする．n_g 個の複素位相 δ_{A1} は $u^{(M)}_{LA}$ の位相を再定義することにより取り除かれる．さらに，$n_g - 1$ 個の複素位相 δ_{1B}（$B \neq 1$）は $d^{(M)}_{LB}$ の位相を再定義することにより取り除かれる．よって，独立な物理的な自由度は $n_g^2 - n_g - (n_g - 1) = (n_g - 1)^2$ 個となり，その内訳は

$$\text{回転角の数}: \frac{n_g(n_g-1)}{2}, \quad \text{複素位相の数}: \frac{(n_g-1)(n_g-2)}{2} \tag{8.50}$$

である．従って，**CP の破れが起こるためには，少なくとも 3 世代のクォークが必要であることがわかる**．このことは小林（M. Kobayashi）と益川（M. Maskawa）により，チャームクォーク（c）が発見される前に（1973 年に）予言された．

3 世代の $V_{\rm KM}$ は 3 個の回転角と 1 個の複素位相を用いて表示される．例えば，

$$\begin{aligned} V_{\rm KM} &\equiv \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1c_3 & s_1s_3 \\ -s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3 + s_2c_3e^{i\delta} \\ s_1s_2 & -c_1s_2c_3 - c_2s_3e^{i\delta} & -c_1s_2s_3 + c_2c_3e^{i\delta} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.51}$$

と表される．ここで，$s_i \equiv \sin\theta_i$，$c_i \equiv \cos\theta_i$，θ_i $(i=1,2,3)$ は 3 個の回転角，δ は複素位相を表す．CP の破れの大きさは $\sin\delta$ に比例する．また，$\theta_1 = \theta_{\mathrm{C}}$，$\theta_2 \to 0$，$\theta_3 \to 0$ において，最初の 2 行 2 列の成分がカビボ行列に帰着することがわかる．

参考までに，第 3 世代のクォークであるボトムクォーク (b) とトップクォーク (t) はフェルミ研究所においてその存在が確認された．b の存在はウプシロンとよばれるメソン $\Upsilon = b\bar{b}$ （Υ 中間子）の発見という形で 1977 年に確認された．b の質量は $m_b \doteqdot 4.18$ GeV である．一方，t の存在は陽子と反陽子の衝突実験により生成された t の崩壊現象において 1994 年に確認された．t は寿命が短いため束縛状態を生成する前に崩壊する．t の質量は $m_t \doteqdot 173.21$ GeV である．3 世代のクォークを有し，世代間の混合および複素位相の存在による CP の破れを記述する模型は**小林・益川模型**とよばれる．

8.3 ニュートリノの物理

第 4 章でマクスウェル方程式を用いて，電磁波の存在が予言されることを学んだ．実際，光が電磁波の一種であることが確認され，電磁気学が確立した．ここでは，素粒子の標準数式を用いてニュートリノに関する予言を行う．

8.3.1 ニュートリノ質量

素粒子の標準数式において，右手型のニュートリノを排除する理由はない．さらに，ゲージ原理を楯(たて)として「ゲージ対称性で許される項はすべて導入する」という方針のもとで，湯川相互作用項

$$\sum_{A,B} \left(y_{AB}^{(\nu)} \bar{l}_{LA} \tilde{\Phi} \nu_{RB} + \text{h.c.} \right) \tag{8.52}$$

を導入すると，ヒグス機構を通して，ニュートリノが質量 $m_{\nu_A} = \dfrac{y_{\nu_A}}{\sqrt{2}} v$ を獲得することがわかる．しかしながら，8.1 節で述べたように実験からの制限 (8.24) を説明するためにはニュートリノに関する湯川結合定数 y_{ν_A} が極めて小さな値を取る必要があり（(8.25) 参照)，このままでは不自然である．

表 8.2 からわかるように，ニュートリノの電荷は 0 なので，**マヨラナフェルミオン**として扱える可能性がある．ここで，マヨラナフェルミオンとはマヨラナ条件 $\psi^c = \psi$ を満たす，粒子と反粒子の区別がないようなフェルミオンで，

$$\psi_{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} \xi \\ -i\sigma^2 \xi^* \end{pmatrix}, \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} i\sigma^2 \eta \\ \eta^* \end{pmatrix} \tag{8.53}$$

と表され，自由粒子に関して，それぞれ

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i m_{\mathrm{M}} \sigma^2 \xi^* = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \eta^* - i m_{\mathrm{M}} \sigma^2 \eta = 0 \tag{8.54}$$

に従う．ここで，m_{M} はマヨラナ質量とよばれる質量である．また，荷電共役変換に伴う位相因子を $e^{i\theta_c} = i$ と選んだ．ちなみに，(8.54) を導くラグランジアン密度は次で与えられる．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\mathrm{M}}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{M}} - \frac{1}{2}m_{\mathrm{M}}\overline{\psi}_{\mathrm{M}}\psi_{\mathrm{M}}$$
$$= \begin{cases} i\xi^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\xi + \frac{1}{2}m_{\mathrm{M}}\left(\xi^{\dagger}i\sigma^2\xi^{*} - \xi^{t}i\sigma^2\xi\right), \\ i\eta^{t}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\eta^{*} - \frac{1}{2}m_{\mathrm{M}}\left(\eta^{t}i\sigma^2\eta - \eta^{\dagger}i\sigma^2\eta^{*}\right). \end{cases} \tag{8.55}$$

さらに，ν_{RA} は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換のもとで変換しないので，ゲージ不変性と抵触せずにマヨラナ質量項

$$\frac{1}{2}\sum_{A,B} M_{AB}\overline{\psi}^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}A}\psi^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}B} \tag{8.56}$$

が許される．ここで，

$$\psi^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}A} = \begin{pmatrix} i\sigma^2\nu^{*}_{RA} \\ \nu_{RA} \end{pmatrix} \tag{8.57}$$

である．

(8.52) と (8.56) を組み合わせることにより，質量項は

$$\mathscr{L}^{(\nu)}_{\mathrm{Mass}} = \frac{1}{2}\sum_{A,B}\left(\overline{\psi}^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}A}, \overline{\psi}^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}A}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}y^{(\nu)}_{AB}v \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y^{(\nu)}_{AB}v & M_{AB} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}B} \\ \psi^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}B} \end{pmatrix} \tag{8.58}$$

と表される．ここで，左手型のニュートリノに関しても，マヨラナフェルミオンによる表記

$$\psi^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}A} = \begin{pmatrix} \nu_{LA} \\ -i\sigma^2\nu^{*}_{LA} \end{pmatrix} \tag{8.59}$$

を用いた．

簡単のために，1 世代の場合について考察する．(8.58) は

$$\mathscr{L}^{(\nu)}_{\mathrm{Mass}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}}, \overline{\psi}^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}y_{\nu}v \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y_{\nu}v & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}} \\ \psi^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}} \end{pmatrix} \tag{8.60}$$

になり，$v \ll M$ として対角化することにより

$$\mathscr{L}^{(\nu)}_{\mathrm{Mass}} \doteqdot \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}'^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}}, \overline{\psi}'^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{y_{\nu}^2v^2}{2M} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi'^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}} \\ \psi'^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}} \end{pmatrix} \tag{8.61}$$

が得られる．ここで，$\psi'^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}} \doteqdot \psi^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}}$, $\psi'^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}} \doteqdot \psi^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}}$ で，$\psi'^{(\nu_L)}_{\mathrm{M}}$ は $O(y_{\nu}^2v^2/M)$ の極めて小さなマヨラナ質量を，$\psi'^{(\nu_R)}_{\mathrm{M}}$ は $O(M)$ の極めて大きなマヨラナ質量をもつ．ここで，ラグランジアン密度において，フェルミオンの質量パラメータはその絶対値のみが物理的であることを思い出そう（(4.127) のあたり

を参照）．このような右手型のニュートリノに関する大きなマヨラナ質量の導入に伴う極端に大きな階層性をもつニュートリノ質量の生成機構は**シーソー機構**（see-saw mechanism）とよばれ，1979年に柳田（T. Yanagida）および独立にゲルマン，ラモン（P. Ramond），スランスキー（S. Slansky）により提案された．

3世代の場合に戻る．$v \ll M_{AB}$ のとき，(8.58) をブロック対角化することにより質量行列

$$
\begin{aligned}
M^{(\nu)} &\doteqdot \begin{pmatrix} \sum_{C,D} \frac{1}{\sqrt{2}} y^{(\nu)}_{AC} v (M_{CD})^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} y^{(\nu)}_{DB} v & 0 \\ 0 & M_{AB} \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} m^{(\nu_L)}_{AB} & 0 \\ 0 & M^*_{AB} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.62}
$$

が得られる．ここで，$m^{(\nu_L)}_{AB}$，M_{AB} は対称な複素行列でそれぞれ適当なユニタリー行列 S_ν，T_ν を用いて対角化される．一方，荷電レプトンに関しては，クォークのときと同様に2種類のユニタリー行列 S_e，T_e を用いて，

$$
\sum_{C,D} (S^\dagger_e)_{AC} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} y^{(e)}_{CD} v \right) (T_e)_{DB} = m_{e_A} \delta_{AB}
\tag{8.63}
$$

のように対角化され，$m_{e_A} = (m_e, m_\mu, m_\tau)$ が得られる．クォークの場合を参考にして，レプトンに関する荷電カレントを質量の固有状態を用いて表すと，

$$
\begin{aligned}
j^{+\mu}_{(l)} &= \sum_A \bar{l}^{(W)}_{LA} \gamma^\mu \tau^+ l^{(W)}_{LA} = \sum_A \overline{\nu}^{(W)}_{LA} \gamma^\mu e^{(W)}_{LA} \\
&= \sum_{A,B} \overline{\nu}^{(M)}_{LA} \gamma^\mu (S^\dagger_\nu S_e)_{AB} e^{(M)}_{LB}
\end{aligned}
\tag{8.64}
$$

となる．ここで，$V_{\mathrm{MNS}} \equiv S^\dagger_\nu S_e$ は**牧・中川・坂田行列**（Maki-Nakagawa-Sakata matrix）とよばれるユニタリー行列で，MNS行列と略されることもある．**ニュートリノの質量の間に縮退がなく，V_{MNS} が単位行列に比例しない場合，世代間の混合が起こる．**V_{MNS} は物理的なパラメータとして3個の混合角 $\theta^{(\nu)}_i$（$i = 1,2,3$）と3個のCP不変性の破れを表す位相 $\delta^{(\nu)}_k$（$k = 1,2,3$）を含む．ここで，小林・益川行列の場合とは異なり，CP不変性の破れを表す位相が2個増加したのは，ν_L に関するマヨラナ質量項の存在により ν_L の位相を再定義する自由度がなくなったからである．新たに導入された位相は**マヨラナ位相**とよばれる．

8.3.2 ニュートリノ振動

前項でみたように，ニュートリノに関して一般に弱い相互作用の固有状態（ν_e，ν_μ，ν_τ）と質量の固有状態（ν_1，ν_2，ν_3 と記す）とは一致せずに混合が生じる．さらに，以下で説明するような**ニュートリノ振動**（neutrino oscillation）

とよばれる状態変化が起こる可能性がある．

簡単のため，ν_e と ν_μ について考察する．2 種類の固有状態の間には，

$$\begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{pmatrix} \tag{8.65}$$

のような関係があるとする．ここで，θ は混合角である．また，シュレーディンガー表示を採用した．この項では $\hbar$，c を明記する．質量の固有状態が従う方程式は

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} \tag{8.66}$$

である．ここで，E_k $(k=1,2)$ は ν_k のエネルギーで，運動量の大きさに光の速さを掛けた量 pc が ν_k の質量 m_k に比べて十分大きいとき，

$$E_k = \sqrt{p^2c^2 + m_k^2c^4} = pc\sqrt{1 + \frac{m_k^2c^2}{p^2}} \fallingdotseq pc + \frac{m_k^2c^3}{2p} \tag{8.67}$$

で近似される．(8.66) の解は

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_kt}|\nu_k(0)\rangle \tag{8.68}$$

で，これと (8.65) を用いて，

$$\begin{aligned} |\nu_e(t)\rangle &= \cos\theta|\nu_1(t)\rangle - \sin\theta|\nu_2(t)\rangle \\ &= \left(\cos^2\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} + \sin^2\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\right)|\nu_e(0)\rangle \\ &\quad + \sin\theta\cos\theta\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\right)|\nu_\mu(0)\rangle, \end{aligned} \tag{8.69}$$

$$\begin{aligned} |\nu_\mu(t)\rangle &= \sin\theta|\nu_1(t)\rangle + \cos\theta|\nu_2(t)\rangle \\ &= \sin\theta\cos\theta\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\right)|\nu_e(0)\rangle \\ &\quad + \left(\cos^2\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} + \sin^2\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\right)|\nu_\mu(0)\rangle \end{aligned} \tag{8.70}$$

が得られる．(8.69) より，時刻 $t=0$ で ν_e が時刻 t で ν_μ に変化する確率 $P(\nu_e \to \nu_\mu; t)$ は

$$\begin{aligned} P(\nu_e \to \nu_\mu; t) &= |\langle\nu_\mu(t)|\nu_e(0)\rangle|^2 = \left|\sin\theta\cos\theta\left(e^{\frac{i}{\hbar}E_1t} - e^{\frac{i}{\hbar}E_2t}\right)\right|^2 \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2\frac{(E_2 - E_1)}{2\hbar}t = \sin^2 2\theta\sin^2\frac{(m_2^2 - m_1^2)c^3}{4\hbar p}t \end{aligned} \tag{8.71}$$

のように表される．同様にして，他の遷移確率も計算され，

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \to \nu_e; t) &= P(\nu_e \to \nu_\mu; t), \\ P(\nu_e \to \nu_e; t) &= P(\nu_\mu \to \nu_\mu; t) = 1 - P(\nu_\mu \to \nu_e; t) \end{aligned} \tag{8.72}$$

となる．(8.71) からわかるように，**相互作用の固有状態と質量の固有状態**

が一致しなくて，質量の固有値が異なる場合，ニュートリノ振動とよばれる異なるニュートリノの間で遷移する現象が起こる．$E_{\text{lab}} = pc$，$L = ct$，$\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ とすると，(8.72) は

$$\begin{aligned} P(\nu_e \to \nu_\mu; t) &= \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 c^4 L}{4\hbar c E_{\text{lab}}} \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left[1.27 \left(\frac{\Delta m^2 c^4}{1\text{eV}^2} \right) \left(\frac{1\text{GeV}}{E_{\text{lab}}} \right) \left(\frac{L}{1\text{km}} \right) \right] \end{aligned} \tag{8.73}$$

と表される．

参考までに，ν_e と ν_μ の混合と振動現象を最初に指摘したのは牧（J. Maki），中川（M. Nakagawa），坂田（S. Sakata）で 1962 年のことである．その当時，ν_μ の存在が確認されたばかりで，ニュートリノ質量が 0 ではないという仮説は大胆なものであった．現在では，**太陽ニュートリノ問題**とよばれるデービス（R. Davis）による測定に基づき提起された，「太陽から飛来する電子ニュートリノが予想値の 3 分の 1 ほどしか観測されないのはなぜか？」という問題および**大気ニュートリノ異常**とよばれるカミオカンデやスーパーカミオカンデにおける梶田（T. Kajita）らの実験グループによる観測に基づき明らかになった「大気中に存在するミューオンニュートリノや反ミューオンニュートリノが予想値よりも少ないのはなぜか？」という問題に対する回答として，ニュートリノ振動が要因であるというのが定説となっている．

8.4 標準模型の謎

素粒子の標準数式を基本数式とする標準模型は 1970 年代の前半にその枠組がほぼ完成した．その後に行われた数多くの実験により，十分に高い精度で様々な検証がなされ，ニュートリノに関する修正を経て現在，電弱スケール（$M_{\text{EW}} \equiv M_Z \doteqdot 90$ GeV とする）における素粒子に関する標準的な理論として確立している．しかしながら，標準模型にはその枠内では理解できない謎が数多く存在する．主な謎を列挙する．

謎 1.　模型の枠組の存在理由が不明である．
謎 2.　非常にたくさんの基本粒子およびパラメータを含んでいる．
謎 3.　ヒグス粒子に関する「自然さの問題」が存在する．
謎 4.　重力を含んだ理論体系ではない．
謎 5.　宇宙に絡んだ未知の実体を説明できない．

謎 1 を具体的に述べると，「なぜ，ゲージ群が $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ なのか？」，「なぜ，3 世代の物質粒子（クォーク，レプトン）が存在するのか？」，「なぜ，物質粒子に関するゲージ量子数はこんなに複雑なのか？」などの問いかけに対して，標準模型は明確な回答をもっていない．

謎 2 に関しては，標準模型は 28 個のパラメータ

$$
\begin{aligned}
&g_s,\ \ g,\ \ g',\ \ \lambda,\ \ \mu,\ \ m_{X_A}\ \ (X=u,d,e,\nu; A=1,2,3),\\
&\theta_i\ \ (i=1,2,3),\ \ \delta,\ \ \theta_i^{(\nu)}\ \ (i=1,2,3),\ \ \delta_k^{(\nu)}\ \ (k=1,2,3),\ \ \theta
\end{aligned}
\tag{8.74}
$$

を含んでいて，実験によりこれらの値を決めることはできるが，理論的には予言することができない．

謎 3 における**自然さの問題**とは，「なぜ，電弱スケールは重力スケール（$M=2.4\times10^{18}$ GeV）に比べて，はるかに小さいのか？」，「電弱スケールは量子補正のもとで安定に保たれるのか？」という問題である．

謎 4 を解決するためには，量子論的に矛盾のない重力理論を構築する必要がある．例えば，一般相対性理論に基づく場の理論を従来の方法で量子化すると，摂動論の枠内でくりこみ不可能な理論になることが知られている．

謎 5 における宇宙に絡んだ未知の実体とは，**暗黒物質**，**暗黒エネルギー**，インフラトンなどのことで標準模型の枠内でこれらの正体は不明である．ここで，インフラトンとはインフレーションとよばれる宇宙初期に起こったとされる急激な加速膨張を引き起こすはたらきをする粒子である．

8.5 展望

素粒子の標準数式の解読が完了し，そこに秘められた物理についての理解が進んだことと思う．たった 6 行の数式に非常の多くの情報が盛り込まれていることに驚嘆してほしい．そして，少し落ち着いたら，さらに高い目標をもって進んでほしい．新たな目標となる可能性のある題材を以下で提示する．それらは標準模型に関する様々な謎に由来するものである．謎の解明を目指し，標準模型を超える理論の探究が盛んに行われている．その一端を紹介する．

8.5.1 力の大統一

「なぜ，ゲージ群が $SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ なのか？」，「なぜ，クォークとレプトンが存在するのか？」という問いかけに対する 1 つの回答として，「より極微の世界（高エネルギー状態）では，標準模型における 3 種類のゲージ相互作用が 1 種類のゲージ群のもとで統一される．それに伴い，クォークとレプトンも少数の多重項の一員として統合される．」という考えは「宇宙誕生のころは対称性がより高い状態にあった」という予想とあいまって魅力的である．力の大統一を実現する理論は**大統一理論**（grand unified theory）とよばれ，この理論により物質粒子のゲージ量子数が理解されたり，ゲージ結合定数や湯川結合定数の数が制限されるという特質をもつが，現在のところ，力の大統一に関する確たる証拠は存在せず，未確認・未完成のままである．ちなみに大統一理論の基本数式は次のように表されるであろう．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\rm GUT} = & \ \overline{\Psi} i \partial\!\!\!/ \Psi \\ & -g_{\rm U}\overline{\Psi} A\!\!\!/_{\rm U}\Psi - \frac{1}{4}A_{\rm U}^{\mu\nu}A_{{\rm U}\mu\nu} \\ & +\overline{\Psi}_I y_{IJ}\Psi_J H + \text{h.c.} \\ & +|D_\mu H|^2 - V(H) + \cdots . \end{aligned} \tag{8.75}$$

8.5.2 超対称性

自然さの問題に対する回答として,「超対称性のような高い対称性により, 量子補正のもとでの電弱スケールの安定性が保証される」が有望視されてきた. ここで, **超対称性** (supersymmetry) とはボソンとフェルミオンを入れ替える変換に関する対称性である. 超対称性を導入して拡張した超対称標準模型とよばれる模型に基づいて様々な解析がなされている. 超対称模型はスーパーパートナーとよばれる超対称変換で入れ替わるスピンの異なる粒子の存在を予言するが, 現在のところ, 標準模型の粒子のスーパーパートナーは見つかっておらず, 超対称性も未確認・未完成のままである. ちなみに, 超対称模型の基本数式は次のように表されるであろう.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\rm SUSY} = & \ \Phi^\dagger e^{2gV}\Phi\big|_D \\ & + \frac{1}{2}{\rm tr}(W^\alpha W_\alpha)\Big|_F + \text{h.c.} \\ & + W(\Phi_i)\big|_F + \text{h.c.} + \cdots . \end{aligned} \tag{8.76}$$

8.5.3 超弦理論

重力を含む量子論的に矛盾のない理論の有力候補は**超弦理論** (superstring theory) である. ここで, 超弦理論とは超対称性を有する弦理論のことである. 超弦理論において, 物体を構成する基本的な実体は点粒子ではなくて弦またはひもとよばれる 1 次元的な拡がりをもつ実体である. 超弦理論において, 1 次元的な拡がりのおかげで重力を含む量子補正が有限の値で得られる. また,「標準模型の粒子および重力子は弦という実体が取る状態の違いにすぎない」という形ですべての素粒子が統一的に理解される可能性が生まれる. ほかにも, 超弦理論は興味深い特徴を有しているが, 現在のところ, 実験的な証拠は存在せず, 未確認・未完成のままである. ちなみに, (ボソン的な) 弦理論の基本数式は

$$S_{\rm NG} = -T\int d^2\sigma\sqrt{-\det\left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu\right)}, \tag{8.77}$$

あるいは,

$$S_{\rm P} = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-g}g^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu \tag{8.78}$$

と表記される．

8.5.4 宇宙の標準模型

暗黒物質，暗黒エネルギー，インフラトンの正体は定かではないが，宇宙の標準模型により，宇宙が誕生して間もないころから起こった時空と物質の共進化の様子がよく説明される．その模型の根幹をなす数式（**宇宙の標準数式**とでもよぶべき数式）は

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2},$$
$$P = P(\rho), \tag{8.79}$$

あるいは，

$$\mathscr{L}_{\text{Univ.}} = -\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\,(R + 2\Lambda) + \sqrt{-g}\mathscr{L}_{\text{fields}},$$
$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{8.80}$$

と表記される．

このような素粒子の標準模型を超える可能性のある理論に興味のある方は，適切な文献に基づいて数式の読み解き作業を継続されるとよいと思う．上記の試みを発展させることにより，標準模型の謎が解けて未知の物理法則が見いだされる可能性がある．また，全く別のアプローチや観点から，謎が解き明かされる可能性も残っている．いずれにせよ，謎解きの正解を得るためには実験・観測による検証が必要不可欠である．様々な実験や実験計画が進行しているが，中でも，国際線形衝突型加速器（ILC）の実現が渇望（かつぼう）され，そこでの成果が期待される．その理由は，ILC を用いてヒグス粒子を主役とする標準模型の精密測定ができるからである．

「なぜ，ヒグス粒子なのか？」という問いかけに対して，「ヒグス粒子は標準模型の要（かなめ）となる粒子で，もしこの粒子が存在していなければ，我々の宇宙は質量をもたない粒子たちが光の速さで飛び交う味気ないものになっていたにちがいない．ヒグス粒子の起源の探求はこの世界の存在の追究にもつながり，存在理由が明らかになると，それが我々が行う様々な知的活動の礎（いしずえ）（哲学的基盤）となるにちがいない．」という回答が考えられる．さらには，実用面に即した回答も考えられる．光と電子が現代生活において欠くことのできない要素になっている現状を踏まえて，それ以外の素粒子が人類の発展に大いに寄与する可能性をむやみに否定できない．光や電子の物理的性質の探求が，理論的な研究とともに実験・観測による検証を通して，精力的・多角的・継続的になされてきた（いる）ことを忘れてはならない．

付録 A
本書の理解を助ける物理数学

本書の理解を助けるために最低限必要と思われる物理数学について紹介する．

A.1 ベクトル

ベクトル（vector）とは「大きさ」と「向き」を合わせもつ量で，ボールド体（太字）を用いて $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{r}$ のように表記する．図示する際には，「大きさ」を長さで，「向き」を矢印で表す．ちなみに，「向き」をもたない量は**スカラー**（scalar）とよばれ，細字を用いて A，B，s，r のように表記する．距離はスカラーである．

座標系の導入によるベクトルの数量化はベクトルの**成分表示**とよばれ，その値は設定する座標系に依存する．直交座標系を採用すると 3 次元ベクトルは

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \tag{A.1}$$

のように表示される．ここで，A_x，A_y，A_z はそれぞれ $\boldsymbol{A}$ の x 成分，y 成分，z 成分とよばれ，これらの値は $\boldsymbol{A}$ の始点を原点としたときの x 軸，y 軸，z 軸上への正射影である（図 A.1 参照）．ピタゴラスの定理より，$\boldsymbol{A}$ の大きさは

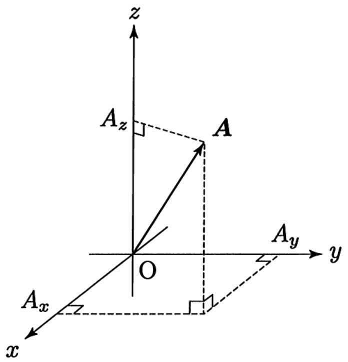


図 A.1　ベクトルの成分表示．

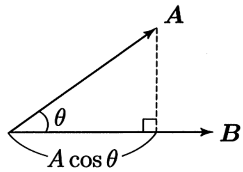


図 A.2　ベクトルの内積.

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{A.2}$$

で与えられる．$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の和，差はそれぞれ

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z), \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \tag{A.4}$$

で，$\boldsymbol{A}$ とスカラー s の積は

$$s\boldsymbol{A} = (sA_x, sA_y, sA_z) \tag{A.5}$$

である．また，$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ である．ここで，$\boldsymbol{0}$ は**零ベクトル**とよばれる，成分がすべて 0 のベクトルである．

単位ベクトル（unit vector）とは大きさが 1 のベクトルである．例えば，$\boldsymbol{A}$ をその大きさで割って得られるベクトル

$$\boldsymbol{e}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \left(\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}, \frac{A_z}{A}\right) \tag{A.6}$$

は $\boldsymbol{A}$ の向きをもつ単位ベクトルである．成分表示において，$|\boldsymbol{A}|$ を A と記した．単位ベクトルを用いて，任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ は

$$\boldsymbol{V} = |\boldsymbol{V}|\boldsymbol{e}_V \tag{A.7}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{e}_V$ は $\boldsymbol{V}$ の向きをもつ単位ベクトルである．

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**内積**は

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta \tag{A.8}$$

で定義される．ここで，θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角である（図 A.2 参照）．内積により得られる量はスカラーで，内積は**スカラー積**（scalar product）ともよばれる．内積の性質として，

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^2, \quad \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = 1 \quad (\boldsymbol{e}：\text{単位ベクトル}), \tag{A.9}$$

$$\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B} \quad \text{ならば,} \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{A.10}$$

がある．ここで，$\perp$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が直交することを表す記号である．

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**外積**は

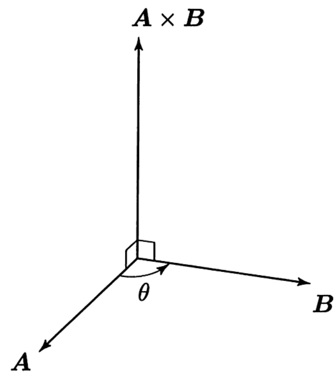


図 A.3 ベクトルの外積.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{A.11}$$

と表記される（図 A.3 参照）．$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の向きは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直で，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角 θ（$0 \leq \theta \leq \pi$）に対して $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ に回したときに右ねじの進む向きであり，$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の大きさは $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ で，その値は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ から構成される平行四辺形の面積に等しい．外積により得られる量はベクトルであり，外積は**ベクトル積**（vector product）ともよばれる．外積の性質として，

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \tag{A.12}$$

$$\boldsymbol{A} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{B} \ \text{ならば，} \ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{A.13}$$

がある．ここで，$/\!/$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が平行であることを表す記号である．

直交座標系において，x 軸，y 軸，z 軸の正の向きを取る単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ とする．それらを成分表示すると，

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}_y = (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}_z = (0,0,1) \tag{A.14}$$

となる．$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ を用いると，$\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z \tag{A.15}$$

のように表される．$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ は**基底ベクトル**とよばれ，

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1, \quad \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1, \quad \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = 1, \tag{A.16}$$

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0, \quad \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = 0, \quad \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0 \tag{A.17}$$

および

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0}, \tag{A.18}$$

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y, \tag{A.19}$$

$$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_y \tag{A.20}$$

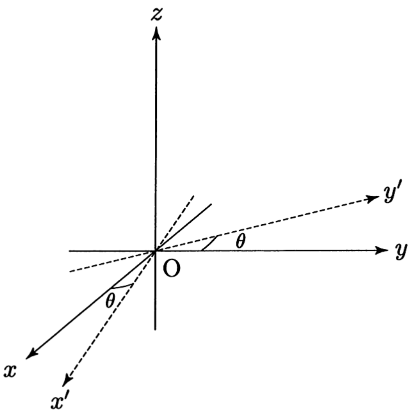


図 A.4　z 軸まわりの空間回転された座標系.

が成り立つ．(A.16) と (A.17) を用いて，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z)\cdot(B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z)\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned} \quad (A.21)$$

と表され，また，(A.18)，(A.19)， (A.20) を用いて，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z)\times(B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z)\\ &= (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) \end{aligned} \quad (A.22)$$

と表される．

$\boldsymbol{A}$ の成分は座標系に依存し，原点を共有する 2 種類の直交座標系のもとで，

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z = A_{x'}\boldsymbol{e}_{x'} + A_{y'}\boldsymbol{e}_{y'} + A_{z'}\boldsymbol{e}_{z'} \quad (A.23)$$

のように表示される．例として，z 軸まわりの角度 θ の回転のもとで，

$$A_{x'} = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta,\ A_{y'} = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta,\ A_{z'} = A_z \quad (A.24)$$

で結ばれる変換を受ける（図 A.4 参照)．このような変換は**直交変換**の一種で (xy 平面内における) **空間回転**とよばれる．空間回転のもとで $|\boldsymbol{A}|$ や $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ は変化しない．このような量はスカラーとよばれる．さらに，**空間反転**とよばれる，すべての座標軸の向きが反転された座標系に移る変換 $\boldsymbol{e}_x \to \boldsymbol{e}_{x'} = -\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y \to \boldsymbol{e}_{y'} = -\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z \to \boldsymbol{e}_{z'} = -\boldsymbol{e}_z$ のもとで，ベクトルが 2 種類に分類される．空間反転は直交変換の一種で，この変換のもとで $\boldsymbol{A}(= (A_x, A_y, A_z))$ が $-\boldsymbol{A}(= (-A_x, -A_y, -A_z) = (A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}))$ に変わるベクトルは単にベクトル，あるいは**極性**(きょくせい)**ベクトル**とよばれる．また，空間反転のもとで成分の値が変わらないベクトルは**擬**(ぎ)**ベクトル**，あるいは**軸性**(じくせい)**ベクトル**とよばれる．ちなみに，2 つの極性ベクトルの外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は軸性ベクトルである．

A.2 微積分

A.2.1 微分

変数 t の関数 $f(t)$ において，t に関する微分は

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{A.25}$$

で定義される．関数 $\dfrac{df(t)}{dt}$ は $f(t)$ の**導関数**，あるいは**微分係数**（derivative）とよばれ，接線の傾きを表す関数である．微分に関する基本的な公式として，

$$\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = \frac{df(t)}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg(t)}{dt}, \tag{A.26}$$

$$\frac{d}{dt}F(\theta(t)) = \frac{dF(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt}, \tag{A.27}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f(t)}\right) = -\frac{df(t)/dt}{f(t)^2}, \tag{A.28}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g(t)}{f(t)}\right) = \frac{\frac{dg(t)}{dt}f(t) - g(t)\frac{df(t)}{dt}}{f(t)^2} \tag{A.29}$$

は有用である．具体的な関数として，t^n，$\log t$，e^t，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を微分すると，

$$\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}, \quad \frac{d\log t}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{de^t}{dt} = e^t,$$
$$\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \cos\theta, \quad \frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta \tag{A.30}$$

となる．

ベクトル $\boldsymbol{A}$ が変数 t に依存するとき，t に関する微分は

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \tag{A.31}$$

で定義され，

$$\frac{d}{dt}(f(t)\boldsymbol{A}(t)) = \frac{df(t)}{dt}\boldsymbol{A}(t) + f(t)\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}, \tag{A.32}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)) = \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}, \tag{A.33}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)) = \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\times\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\times\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}, \tag{A.34}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}(\theta(t)) = \frac{d\boldsymbol{V}(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{A.35}$$

が成り立つ．大きさと向きが変化しないベクトルは**定ベクトル**とよばれる．

以下で運動状態に関するベクトル量（変位，速度，加速度）を紹介する．

A.2.1.1 変位

物体がどの向きにどれだけ変化したかを表す量（位置の変化量）は**変位**（displacement）とよばれ，$\Delta\boldsymbol{r}$ と表される．図 A.5 のように物体の位置が $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$

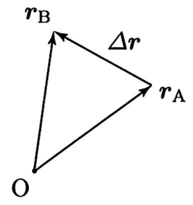


図 A.5　変位.

から $\boldsymbol{r}_\mathrm{B}$ に変化したとき，変位は

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\mathrm{B} - \boldsymbol{r}_\mathrm{A} \tag{A.36}$$

である．ここで，物体の位置を表すベクトル $\boldsymbol{r}_\mathrm{A}$ や $\boldsymbol{r}_\mathrm{B}$ は**位置ベクトル**（position vector）とよばれ，原点 O を基準点（始点）とするベクトルである．

A.2.1.2　速さと速度

物体の移動距離を時刻 t の関数 $s(t)$ として表す．質点が時間 Δt の間に距離 $\Delta s(= s(t+\Delta t) - s(t))$ だけ移動したとする．時刻 t での**速さ**は

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt} \tag{A.37}$$

で定義されるスカラーである．速さは $s(t)$ の t における接線の傾きに等しい．

物体の速さと運動する向きを組み合わせたベクトルを**速度**（velocity）とよぶ．質点が時間 Δt の間に $\boldsymbol{r}(t)$ から $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ に移動したとき，時刻 t での速度は

$$\boldsymbol{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \tag{A.38}$$

で定義される．直交座標系を用いて，速度 $\boldsymbol{v}(t)$ の成分は

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \tag{A.39}$$

と表される．(A.7) を用いて，速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_v = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_v \tag{A.40}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{e}_v$ は運動の向きを表す単位ベクトルである．物体の速度 $\boldsymbol{v}$ が時間によらない運動は，v も $\boldsymbol{e}_v$ も一定で**等速直線運動**とよばれる．また，v が時間によらない円運動は**等速円運動**とよばれる．

A.2.1.3　加速度

速度の変化を表すベクトルは**加速度**（acceleration）とよばれ，時刻 t での加速度は

$$\boldsymbol{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} \tag{A.41}$$

で定義される．直交座標系を用いて，加速度の成分は

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}, \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}, \quad a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} \tag{A.42}$$

と表される．また，$\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ より，

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}, \tag{A.43}$$

$$a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad a_y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \quad a_z(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2} \tag{A.44}$$

が成り立つ．(A.40) を用いて，加速度に関する公式

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{e}_v) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_v + v\frac{d\boldsymbol{e}_v}{dt} \tag{A.45}$$

が得られ，加速度は「速さの変化」と「向きの変化」という 2 つの要素からなることがわかる．**速さが変わらなくても，運動の向きが変われば加速度が生じることに留意しよう．**

A.2.2 積分

微分すると $f(t)$ になる関数，すなわち，

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \tag{A.46}$$

となる $F(t)$ を $f(t)$ の**不定積分**，あるいは**原始関数**とよび，

$$\int f(t)dt = F(t) + C \tag{A.47}$$

と表す．ここで，C は**積分定数**とよばれる定数である．また，$f(t)$ は**被積分関数**とよばれ，$f(t)$ の不定積分を求めることを**積分**するという．

積分に関する基本的な公式として，

$$\int \frac{df(t)}{dt}g(t)dt = f(t)g(t) - \int f(t)\frac{dg(t)}{dt}dt \quad \text{(部分積分)}, \tag{A.48}$$

$$\int f(\theta)d\theta = \int f(\theta(t))\frac{d\theta(t)}{dt}dt \quad \text{(置換積分)} \tag{A.49}$$

が成り立つ．具体的な関数として，t^n，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を不定積分すると，

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + C \qquad (n \neq -1), \tag{A.50}$$

$$\int \sin\theta = -\cos\theta + C, \quad \int \cos\theta = \sin\theta + C \tag{A.51}$$

となる．ここで，C は積分定数である．

$f(t)$ の不定積分 $F(t)$ に対して，

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \frac{dF(t)}{dt}dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{A.52}$$

を $f(t)$ の区間 a から b までの**定積分**といい，(A.52) は**微分積分学の基本定理**とよばれる．$f(t)$ の区間 a から b までの定積分は

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\Delta t \tag{A.53}$$

で定義される（図 A.6 参照）．ここで，$a = t_1$，$b = t_{N+1}$，$\Delta t = t_{k+1} - t_k$（$k = 1, \cdots, N$）である．

A.2.3 偏微分

U は x，y，z を変数とする関数 $U = U(x, y, z)$ とする．$\dfrac{\partial U}{\partial x}$，$\dfrac{\partial U}{\partial y}$，$\dfrac{\partial U}{\partial z}$ はそれぞれ x，y，z による偏微分で，

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x}, \tag{A.54}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y\to 0} \frac{U(x, y+\Delta y, z) - U(x, y, z)}{\Delta y}, \tag{A.55}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \equiv \lim_{\Delta z\to 0} \frac{U(x, y, z+\Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta z} \tag{A.56}$$

で定義される．さらに，x，y，z は t を変数とする関数 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$ とする．このとき，$\dfrac{dU}{dt}$ は U の**全微分**（total differential）とよばれ，

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \left(\frac{U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta t} \right. \\
&\quad + \frac{U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z+\Delta z)}{\Delta t} \\
&\quad \left. + \frac{U(x, y, z+\Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta t} \right) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \left(\frac{U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right. \\
&\quad + \frac{U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z+\Delta z)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\
&\quad \left. + \frac{U(x, y, z+\Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) \\
&= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \boldsymbol{\nabla} U \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}
\end{aligned} \tag{A.57}$$

が成り立つ．ここで，$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$，$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$，$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$ で，$\Delta t \to 0$ に連動して，$\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$，$\Delta z \to 0$ となることを用いた．また，$\boldsymbol{\nabla} U$ は U の**勾配**（gradient）とよばれる量で，

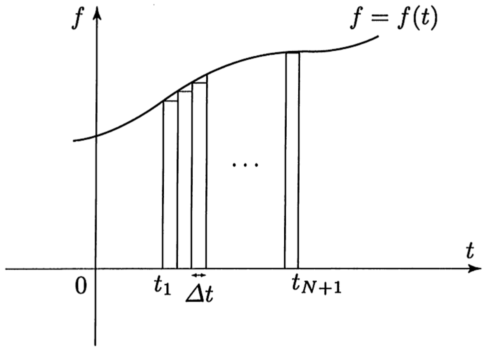


図 A.6　定積分.

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{A.58}$$

である（A.6.1 項参照）．ここで，∇ はナブラと発音される微分演算子である．

A.3　関数

A.3.1　指数関数，対数関数，三角関数

A.3.1.1　指数関数

関数 $y = a^x$（a：定数）は x を変数とし a を底とする**指数関数**（exponent function, exponential）とよばれる．主に，ネイピア（**Napier**）数 e を底とする指数関数（以後，単に指数関数とよぶ）を扱う．ここで，ネイピア数 e とは

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\cdots \tag{A.59}$$

で定義される無理数で，

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \tag{A.60}$$

のように無限級数で表される．(A.60) で，$n! = n(n-1)\cdots 1$，$0! = 1$ である．$y = e^x$ は

$$y = e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \tag{A.61}$$

のように無限級数の形で表される．(A.61) より，指数関数に関する微分公式

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad \frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax} \tag{A.62}$$

が示される．また，指数関数に関する積分公式

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad (a,\ C：定数) \tag{A.63}$$

が成り立つ．e の肩に乗る関数が複雑な場合，$e^{f(x)}$ を $\exp(f(x))$ のように表記することがある．

A.3.1.2 対数関数

関数 $x = b^y$（b：$b > 0$ かつ $b \neq 1$ の定数）は $y = \log_b x$ と表され，x を変数とし b を底とする**対数関数**（logarithmic function）とよばれる．e を底とする対数関数（以後，単に対数関数とよぶ）は $y = \log_e x = \log x$，あるいは $\ln x$ と表記される．対数関数に関する微分公式と積分公式として，

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C \tag{A.64}$$

などがある．ここで，C は定数である．

A.3.1.3 三角関数

正弦関数 $y = \sin\theta$，余弦関数 $y = \cos\theta$，正接関数 $y = \tan\theta$ などの平面三角法における角度と線分の長さの関係を表す関数は総称して**三角関数**（trigonometric function）とよばれる．三角関数は周期性

$$\begin{aligned}&\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta,\\ &\tan(\theta + n\pi) = \tan\theta \quad (n = 1, 2, \cdots)\end{aligned} \tag{A.65}$$

および偶奇性

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta \tag{A.66}$$

をもつ．また，**加法定理**とよばれる公式

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned} \tag{A.67}$$

およびそれらから派生する**2 倍角の公式**

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta,\\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{A.68}$$

は有用である．

関数 $f(\theta)$ に関する $\theta = 0$ のまわりでのテーラー展開の公式

$$f(\theta) = f(0) + \frac{1}{1!}\frac{df(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=0}\theta + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=0}\theta^2 + \cdots \tag{A.69}$$

と (A.30)，$\cos 0 = 1$，$\sin 0 = 0$ を用いて，$\cos\theta$，$\sin\theta$ は

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots, \quad \sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \tag{A.70}$$

のように級数展開される．

指数関数 $y = e^x$ の表式 (A.61) および微分公式 (A.62) は変数を実数 x から複素数 $z = x + iy$（x，y は実数）に拡張しても成り立つ．(A.61) を用いて，

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned} \tag{A.71}$$

のように三角関数を用いて表される．ここで, (A.70) を用いた．さらに, (A.71) と $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ を用いて,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{A.72}$$

が導かれる．$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ は**オイラー（Euler）**の公式とよばれる．

A.3.2 ディラックの δ 関数

ディラックの δ 関数 $\delta(x-y)$ は $x \neq y$ において 0 で，$x = y$ での値は無限大となり，$x = y$ を含む領域での積分値が,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x-y)dx = 1 \quad (\varepsilon > 0) \tag{A.73}$$

となるような**超関数**とよばれる一般化された関数の一種である．

δ 関数の性質をいくつか紹介する．十分に滑らかな関数 $f(x)$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \tag{A.74}$$

および

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\delta(x)}{dx}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx}\left(f(x)\delta(x)\right) - \frac{df(x)}{dx}\delta(x)\right]dx \\ &= \left[f(x)\delta(x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\delta(x)dx = -\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} \end{aligned} \tag{A.75}$$

が成り立つ．(A.74) より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x)dx = 0 \tag{A.76}$$

が成り立つ．また，δ 関数は $x \to -x$ のもとで不変（$\delta(-x) = \delta(x)$）である．さらに，$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\delta(\eta - \xi)d\eta$ に対して，変数変換（$\xi = ax$，$\eta = ay$，a：定数）を施すことにより,

$$f(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ay)\delta(a(x-y))d(ay)$$

$$= |a| \int_{-\infty}^{\infty} f(ay)\delta(a(x-y))dy \tag{A.77}$$

が得られ，(A.77) と $f(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ay)\delta(x-y)dy$ との両立性より，

$$|a|\delta\left(a(x-y)\right) = \delta(x-y), \quad \text{すなわち，} \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{A.78}$$

が導かれる．(A.78) を用いて，

$$\begin{aligned}\delta(x^2-a^2) &= \delta\left((x+a)(x-a)\right) = \frac{1}{|x+a|}\delta(x-a) + \frac{1}{|x-a|}\delta(x+a) \\ &= \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]\end{aligned} \tag{A.79}$$

が導かれる．さらに，(A.79) を一般化して，

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}\right|_i}\delta(x-a_i) \tag{A.80}$$

が成り立つ．ここで，$\left|\frac{df}{dx}\right|_i = \left|\frac{df}{dx}\right|_{x=a_i}$，$a_i$ は $f(x)=0$ の解である．

$\delta(x-y)$ は指数関数を用いて，

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)}dk \tag{A.81}$$

と表される．(A.81) は公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta = \delta_{mn} \quad (m, n：\text{整数}) \tag{A.82}$$

に対して，m，n を連続変数に置き換えた場合に相当する．ここで，δ_{mn} はクロネッカーの δ （Kronecker's δ）とよばれる記号で，

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{A.83}$$

を表す．同様にして，$\delta^3(\boldsymbol{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ は

$$\delta^3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d^3k \tag{A.84}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ である．

A.3.3 汎関数

関数 $\phi(x)$ に依存する積分

$$F[\phi] = \int f(\phi(x))dx \tag{A.85}$$

のような関数空間を定義域とする実数（あるいは複素数）に値をもつ関数 $F[\phi]$

を汎関数（functional）とよぶ．ちなみに，(A.85) において，$\phi(x)$ を $\phi(y)$ に写す汎関数はディラックの δ 関数を用いて，

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(x-y)dx \tag{A.86}$$

と表される．以後，変数は実数値を取り，積分領域は多くの場合 $-\infty$ から ∞ とし，積分領域は特に明記しないことにする．

$F[\phi]$ の汎関数微分は

$$\begin{aligned}\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[\tilde{\phi}]-F[\phi]}{\int\tilde{\phi}(x)dx-\int\phi(x)dx}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int f(\phi(x)+\varepsilon\delta(x-y))dx-\int f(\phi(x))dx}{\varepsilon}\end{aligned} \tag{A.87}$$

で定義される．ここで，$\tilde{\phi}(x)=\phi(x)+\varepsilon\delta(x-y)$ （ε：無限小の定数）である．

(A.86)，(A.87) を用いて，$\dfrac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int(\phi(z)+\varepsilon\delta(z-y))\delta(z-x)dz-\int\phi(z)\delta(z-x)dz}{\varepsilon}\\ &= \delta(x-y)\end{aligned} \tag{A.88}$$

となる．f が $\phi(x)$ と $\partial_x\phi=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ を含むとき，

$$\begin{aligned}&f(\phi(x)+\varepsilon\delta(x-y))-f(\phi(x))\\ &\quad=\frac{\partial f}{\partial\phi(x)}\varepsilon\delta(x-y)+\frac{\partial f}{\partial\partial_x\phi(x)}\varepsilon\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x}+O(\varepsilon^2)\\ &\quad=\left[\frac{\partial f}{\partial\phi(x)}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\partial_x\phi(x)}\right)\right]\varepsilon\delta(x-y)\\ &\qquad+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\partial_x\phi(x)}\varepsilon\delta(x-y)\right)+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{A.89}$$

となり，汎関数微分は

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)}=\frac{\partial f}{\partial\phi(y)}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial\partial_y\phi(y)}\right) \tag{A.90}$$

となる．同様にして，汎関数

$$F[\varphi]=\int\mathscr{F}(\varphi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\nabla}\varphi)d^3x \tag{A.91}$$

に対して，

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}=\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\varphi}-\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\varphi},\quad\frac{\delta\varphi(\boldsymbol{x})}{\delta\varphi(\boldsymbol{y})}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.92}$$

が導かれる．(A.92) の第 2 式を用いて，

$$\int\frac{\delta\varphi(\boldsymbol{x})}{\delta\varphi(\boldsymbol{z})}\frac{\delta\pi(\boldsymbol{y})}{\delta\pi(\boldsymbol{z})}d^3z=\int\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\delta^3(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})d^3z=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.93}$$

が導かれ，(2.96) の第 1 式 $\{\varphi_a(\boldsymbol{x},t),\pi^b(\boldsymbol{y},t)\}_{\text{PB}}=\delta_a{}^b\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ が成り立つ

ことがわかる．また，汎関数

$$F[\varphi] = \int \mathscr{F}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi) d^4x \tag{A.94}$$

に対して，次式が導かれる．

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \varphi} - \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial_\mu \varphi} \right). \tag{A.95}$$

A.4 テンソル

A.4.1 ユークリッド空間上のテンソル

ベクトルの復習から始める．A.1 節でベクトルとは「大きさ」と「向き」を合わせもつ量であると述べた．3 次元空間において，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \boldsymbol{e}_i \tag{A.96}$$

と表記する．ここで，v^i $(i = 1, 2, 3)$ はベクトルの成分，$\boldsymbol{e}_i$ は基底ベクトルである．z 軸まわりの角度 θ の回転により v^i は

$$v'^1 = v^1 \cos\theta + v^2 \sin\theta,\ v'^2 = -v^1 \sin\theta + v^2 \cos\theta,\ v'^3 = v^3 \tag{A.97}$$

のように変換する（(A.24) 参照）．同様にして，$\boldsymbol{e}_i$ は

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 \cos\theta + \boldsymbol{e}_2 \sin\theta,\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 \sin\theta + \boldsymbol{e}_2 \cos\theta,\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3 \tag{A.98}$$

のように変換する．$\boldsymbol{v}$ は空間回転 (A.97)，(A.98) のもとで，

$$\sum_{i=1}^{3} v'^i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{3} v^i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v} \tag{A.99}$$

となり不変である．

上記の変換を一般化した変換

$$v'^i = \sum_{j=1}^{3} O^i{}_j v^j = \sum_{j=1}^{3} v^j (O^t)_j{}^i, \quad \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{3} O_i{}^j \boldsymbol{e}_j \tag{A.100}$$

について考える．ここで，$O^i{}_j$，$(O^t)_j{}^i$，$O_i{}^j$ は 9 個の数を 3 行 3 列の正方形状に並べた行列とよばれる量の成分に相当する（行列に関しては A.5.2 項参照）．また，t は転置とよばれる行と列を置き換える操作を表す．(A.97)，(A.98) の場合，

$$\begin{aligned}
O^1{}_1 &= (O^t)_1{}^1 = O_1{}^1 = \cos\theta, \quad O^1{}_2 = (O^t)_2{}^1 = O_1{}^2 = \sin\theta, \\
O^2{}_1 &= (O^t)_1{}^2 = O_2{}^1 = -\sin\theta, \quad O^2{}_2 = (O^t)_2{}^2 = O_2{}^2 = \cos\theta, \\
O^1{}_3 &= (O^t)_3{}^1 = O_1{}^3 = 0, \quad O^2{}_3 = (O^t)_3{}^2 = O_2{}^3 = 0,
\end{aligned}$$

$$O^3{}_1 = (O^t)_1{}^3 = O_3{}^1 = 0,\quad O^3{}_2 = (O^t)_2{}^3 = O_3{}^2 = 0,$$
$$O^3{}_3 = (O^t)_3{}^3 = O_3{}^3 = 1 \tag{A.101}$$

である．$\boldsymbol{v}$ は変換 (A.100) のもとで，

$$\sum_{i=1}^{3} v'^i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i,k,l=1}^{3} O^i{}_k v^k O_i{}^l \boldsymbol{e}_l = \sum_{i,k,l=1}^{3} v^k (O^t)_k{}^i O_i{}^l \boldsymbol{e}_l \tag{A.102}$$

となり，変換行列の成分 $O^i{}_j$，$(O^t)_j{}^i$，$O_i{}^j$ が

$$\sum_{i=1}^{3} O^i{}_k O_i{}^l = \sum_{i=1}^{3} (O^t)_k{}^i O_i{}^l = \delta_k{}^l = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \tag{A.103}$$

を満たすとき $\boldsymbol{v}$ が不変になることがわかる．(A.103) を満たすような変換行列による成分や基底ベクトルの変換は**直交変換**とよばれ，直交変換のもとでベクトルの内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ が不変に保たれる．よって，直交変換のもとで，

$$|d\boldsymbol{x}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{A.104}$$

は不変である．ここで，$|d\boldsymbol{x}|$ は線素である．

直交変換は空間回転と空間反転からなる．空間反転のもとで，位置ベクトルが $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \to \boldsymbol{x}' = (x', y', z') = (-x, -y, -z)$ のように変換し，

$$x'^i = \sum_{j=1}^{3} O^i{}_j x^j,\quad O^i{}_j = -\delta^i{}_j = \begin{cases} -1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{A.105}$$

で表される．空間反転を用いて，ベクトルが極性ベクトルと軸性ベクトルの 2 種類に分類される（A.1 節の座標変換の箇所参照）．

テンソル（tensor）とはベクトルを一般化した量で「大きさ」とともに複数の「向き」をもつ量である．すなわち，直交変換のもとである定まった変換をする多くの成分を有する．

i と j で指定される 9 個の成分をもつテンソル

$$\boldsymbol{t} = \sum_{i,j=1}^{3} t^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{A.106}$$

を例に取ろう．ここで，t^{ij} がテンソル $\boldsymbol{t}$ の成分で，$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ が基底ベクトルに相当する量で基底とよぶことにする．空間回転のもとでのベクトルの変換性 (A.100) を参考にすると，t^{ij}，$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ はそれぞれ

$$t'^{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} O^i{}_k O^j{}_l t^{kl} = \sum_{k,l=1}^{3} t^{kl} (O^t)_k{}^i (O^t)_l{}^j, \tag{A.107}$$

$$\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j = \sum_{k,l=1}^{3} O_i{}^k O_j{}^l \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l \tag{A.108}$$

のように変換することがわかる．t^{ij} は添字を 2 つ有し 2 階テンソルとよばれる（ベクトルは 1 階テンソル，スカラーは 0 階テンソルとみなされる）．ベクトルと同様に，空間回転のもとで成分や基底はそれぞれ (A.107)，(A.108) に基づいて変換するが，$\boldsymbol{t}$（テンソルそのもの）は不変であることに注意しよう．また，空間反転により，テンソルが 2 つに分類される．具体的には，空間反転のもとで $O^i{}_j$ による (A.107) のような変換をするものをテンソル，変換行列のほかに全体に余分な負符号をもつ変換をするものを**擬テンソル**とよぶ．

A.4.2 ミンコフスキー時空上のテンソル

4 次元ミンコフスキー時空上におけるベクトルやテンソルについて紹介する．時空内に直交座標系を設けて時空点を，

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, x, y, z) \tag{A.109}$$

で指定する．ここで，c は光の速さ，t は時間座標，(x, y, z) は空間座標である．

ユークリッド空間における直交変換に相当する変換はローレンツ変換とよばれる変換で，x^μ によらないような 16 個の成分をもつ量 $\Lambda^\mu{}_\nu$ を用いて，

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{A.110}$$

と表される．$\Lambda^\mu{}_\nu$ が満たすべき関係式についてはのちほど紹介する．また，この節では簡潔さよりもわかりやすさを優先して，「添字として同じギリシア文字が上下に現れたとき，和の記号を省く（$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$ を $a_\mu b^\mu$ と表記する）」という**アインシュタインの和の規約**を用いないことにする．ローレンツ変換のもとで不変に保たれる量として，(A.104) の拡張版である 4 次元線素の 2 乗

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - |d\boldsymbol{x}|^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \end{aligned} \tag{A.111}$$

が存在する．**計量テンソル**（metric tensor）とよばれる量 $\eta_{\mu\nu}$ を導入することによりベクトルやテンソルが扱いやすくなる．$\eta_{\mu\nu}$ の成分は

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1, \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \tag{A.112}$$

で定義される．$\eta_{\mu\nu}$ を行列を用いて表記すると，

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.113}$$

となる．$\eta_{\mu\nu}$ を用いて，下付き添字をもつ 4 成分量 x_μ を，

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} x^\nu \tag{A.114}$$

のように定義する．(A.112)，(A.114) より，

$$x_0 = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{0\nu} x^\nu = x^0, \quad x_1 = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{1\nu} x^\nu = -x^1,$$

$$x_2 = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{2\nu} x^\nu = -x^2, \quad x_3 = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{3\nu} x^\nu = -x^3 \tag{A.115}$$

が導かれ，

$$x_\mu = \left(x^0, -x^1, -x^2, -x^3\right) = (ct, -x, -y, -z) \tag{A.116}$$

であることがわかる．$\eta_{\mu\nu}$ の逆を，

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\mu\lambda} \eta^{\lambda\nu} = \delta_\mu{}^\nu, \quad \sum_{\lambda=0}^{3} \eta^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu \tag{A.117}$$

を満たす 16 個の成分をもつ量 $\eta^{\mu\nu}$ とすると，

$$\eta^{00} = 1, \quad \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1, \quad \eta^{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \tag{A.118}$$

である．ds^2 は

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu=0}^{3} dx_\mu dx^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu} dx_\nu dx_\mu \end{aligned} \tag{A.119}$$

のように様々な形で表されることに慣れよう．

$\eta^{\mu\nu}$，$\eta_{\mu\nu}$ を用いて，添字の上げ下げが実行される．例えば，

$$a^\mu = \left(a^0, a^1, a^2, a^3\right) = (a_0, -a_1, -a_2, -a_3), \tag{A.120}$$

$$b_\mu = (b_0, b_1, b_2, b_3) = \left(b^0, -b^1, -b^2, -b^3\right) \tag{A.121}$$

なので，

$$a^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{3} \eta^{\nu\mu} a_\nu, \quad b_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} b^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\nu\mu} b^\nu \tag{A.122}$$

が成り立つ．

上下に同じ添字が存在する場合は和が取られるので，添字はダミー（身代わり）となりどんな文字を使用してもよい．例えば，

$$\sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a^\nu b_\nu = \sum_{\lambda=0}^{3} a^\lambda b_\lambda \tag{A.123}$$

が成り立つ．ここで，和を取る操作は縮約（contraction）とよばれる．

4元ベクトル a^μ, b_μ はローレンツ変換のもとで，それぞれ

$$a'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu, \quad b'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda_\mu{}^\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{3} b_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \tag{A.124}$$

のように変換する．正確には，擬ベクトルに関しては空間反転のもとで余分な負符号が付いた形で変換する．

(A.124) のもとで，a^μ に関する内積 $\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu a^\mu$ は

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{3} a'_\mu a'^\mu &= \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\lambda=0}^{3} a_\lambda (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu \sum_{\sigma=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\sigma a^\sigma \\ &= \sum_{\mu,\lambda,\sigma=0}^{3} a_\lambda (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma a^\sigma = \sum_{\lambda,\sigma=0}^{3} a_\lambda \delta^\lambda{}_\sigma a^\sigma = \sum_{\lambda=0}^{3} a_\lambda a^\lambda \end{aligned} \tag{A.125}$$

となり不変に保たれることがわかる．

一方，$b_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} b^\nu$ を用いて，b_μ のローレンツ変換が，

$$b'_\mu = \left(\sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} b^\nu\right)' = \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} b'^\nu = \sum_{\nu,\lambda=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\lambda b^\lambda \tag{A.126}$$

と表され，これを併用して，$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu a^\mu$ のローレンツ変換を計算すると，

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{3} a'_\mu a'^\mu &= \sum_{\mu,\nu,\lambda,\sigma=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\lambda a^\lambda \Lambda^\mu{}_\sigma a^\sigma = \sum_{\mu,\nu,\lambda,\sigma=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\lambda \Lambda^\mu{}_\sigma a^\lambda a^\sigma \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu a^\mu a^\nu \end{aligned} \tag{A.127}$$

となる．$\sum_{\mu=0}^{3} a'_\mu a'^\mu$ が $\sum_{\mu=0}^{3} a_\nu a^\nu = \sum_{\mu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$ と一致するためには，$\Lambda^\mu{}_\nu$ が

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \tag{A.128}$$

を満たす必要がある．(A.128) がローレンツ変換に関する条件式である．ローレンツ変換はその元として，空間回転，ローレンツブースト，空間反転，時間反転を含む．ここで，ローレンツブーストとは互いに等速直線運動している座標系の間の変換である．

4元ベクトルの成分のローレンツ変換性をもとにして，テンソルの成分のローレンツ変換性が決まる．例えば，2階のテンソルの成分 $t^{\mu\nu}$，3階のテンソルの成分 $s^{\mu\nu}{}_\lambda$ のローレンツ変換はそれぞれ

$$t'^{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}t^{\alpha\beta}, \quad s'^{\mu\nu}{}_{\lambda} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda_{\lambda}{}^{\gamma}s^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \quad \text{(A.129)}$$

で与えられる．擬テンソルに関しては空間反転のもとで余分な負符号が付いた形で変換する．ちなみに，$s^{\mu\nu}{}_{\lambda}$ について，ν と λ を縮約した量 $\sum_{\nu=0}^{3} s^{\mu\nu}{}_{\nu}$ は 4 元ベクトル a^{μ} と同じ変換性を示す．

A.5 線形代数

A.5.1 線形性

線形性（**線型性**）とは加法および定数倍（スカラー倍）という演算のもとで成り立つ，1 次関数 $f(x) = ax$（a：定数）のような比例関係を一般化した規則性のことである．

集合 S から集合 S' への写像 $T : S \to S'$（S の元 x が S' の元 $T(x)$ に写る）が加法性 $T(x+y) = T(x) + T(y)$ （$x, y \in S$）と定数倍 $T(cx) = cT(x)$（c：定数）を満たすとき，**線形写像**とよばれる．線形写像の例を 2 つ挙げる．

（例） $f(x) = ax$（a：定数）：集合 S，S' がともに実数の集合 $\boldsymbol{R}$ であるとき，$f(x)$ は実関数である．

（例） $\dfrac{df(x)}{dx}$：集合 S，S' はともに関数全体の集合で，微分作用素 $\dfrac{d}{dx}$ が写像を引き起こす．

線形空間（linear space）V とはその元 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ に関して，加法 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ および定数倍 $c\boldsymbol{v}$（c は定数）が定義されていて，それらが V の元となり，さらにいくつかの性質（$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$ など）を満たす集合のことである．例えば，ベクトルを元とする集合は線形空間である．3 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分表示

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{(A.130)}$$

は 3 次元実ベクトルを元とする線形空間 V から 3 次元の実数の集合 $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $T : V \to \boldsymbol{R}^3$ である．また，関数を元とする集合も線形空間で**関数空間**とよばれる．線形空間 V から線形空間 W への線形写像全体の集合 $\mathscr{M}(V, W)$ も線形空間である．実際，f，g を $\mathscr{M}(V, W)$ の元とし，c_1，c_2 を任意の定数とするとき，$c_1 f + c_2 g$ は $\mathscr{M}(V, W)$ に属する．

A.5.2 行列

この項以降は特に断らない限り，ベクトルや行列の成分は複素数の値をもつものとする．また，煩雑さを避けるため，この項では添字はすべて下付きに統

一する．n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{A.131}$$

から m 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{A.132}$$

への線形写像は行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{A.133}$$

と表される．ここで，行列（matrix）とは mn 個の数 a_{ij}（$i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$）を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{A.134}$$

のように m 行 n 列の長方形状に並べたもので，以下で紹介する演算の規則に従う．(A.134) は $m \times n$ 行列（m 行 n 列の行列），a_{ij} は A の ij 成分とよばれる．

行列の演算について紹介する．

(1) 行列の定数倍

$m \times n$ 行列 A の定数倍 cA（c：定数）はその ij 成分 $(cA)_{ij}$ が ca_{ij} であるような $m \times n$ 行列である．

(2) 行列の和

A，B がともに $m \times n$ 行列で，それらの ij 成分をそれぞれ a_{ij}，b_{ij} とする．A と B の和 $A+B$ はその ij 成分 $(A+B)_{ij}$ が $a_{ij} + b_{ij}$ であるような $m \times n$ 行列である．

(3) 行列の積

A が $m \times l$ 行列，B が $l \times n$ 行列で，それらの ij 成分をそれぞれ a_{ij}，b_{ij} とする．A と B の積 AB はその ij 成分 $(AB)_{ij}$ が

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} \tag{A.135}$$

であるような $m \times n$ 行列である．具体例として，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix} \tag{A.136}$$

が成り立つ．

(A.134) において，行と列を置き換えた $n \times m$ 行列

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \tag{A.137}$$

は A の**転置行列**とよばれる．ここで，t は転置を表す．

さらに，(A.137) において，複素共役を取った $n \times m$ 行列

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \dots & a_{m1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix} \tag{A.138}$$

は A の**エルミート共役行列**とよばれる．ここで，$*$ は複素共役を表す．ちなみに，転置と複素共役の操作はその順序に依らない（$A^\dagger = \left(A^t\right)^* = (A^*)^t$）．

$n \times 1$ 行列は n 次元列ベクトルとよばれ，(A.131) のように表される．一方，$1 \times n$ 行列は n 次元行ベクトルとよばれ，(A.134) に従えば，$\boldsymbol{x}^t = (x_1 \cdots x_n)$ と記すべきであるが，混同を避けるためにコンマを用いて，

$$\boldsymbol{x}^t = (x_1, \cdots, x_n) \tag{A.139}$$

のように表すことにする．

行の数と列の数が等しい行列は**正方行列**とよばれ，その a_{ii} 成分を**対角成分**，対角成分以外の成分 a_{ij}（$i \neq j$）を**非対角成分**という．非対角成分がすべて 0 である行列を**対角行列**という．対角成分がすべて 1 であるような対角行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (I)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{A.140}$$

を**単位行列**（unit matrix）という．I を $n \times n$ 単位行列とする．このとき，任意の $m \times n$ 行列 A，$n \times m$ 行列 B に対して，

$$AI = A, \quad IB = B \tag{A.141}$$

が成り立つ．また，正方行列 A に対して，$AB = I$，$BA = I$ を満たすよう

な正方行列 B を A の**逆行列**とよび，A^{-1} と表す．逆行列をもつ行列は**正則行列**とよばれる．具体例として，2×2 行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (ad-bc\neq 0) \tag{A.142}$$

の逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{A.143}$$

である．

任意の $n\times n$ 行列 $A,\cdot B$ に関して，

$$(AB)^t=B^tA^t,\quad (AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger \tag{A.144}$$

が成り立つ．また，任意の $n\times n$ 正則行列 A，B に関して，

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \tag{A.145}$$

が成り立つ．

正方行列 A について，$A^t=A$ を満たす行列を**対称行列**，$A^t=-A$ を満たす行列を**反対称行列**（または**交代行列**），$A^\dagger=A$ を満たす行列を**エルミート行列**（Hermitian matrix），$A^\dagger=-A$ を満たす行列を**反エルミート行列**という．また，$A^\dagger=A^{-1}$ を満たす行列を**ユニタリー行列**（unitary matrix）という．

次に正方行列を数に写す演算を2つ紹介する．

A.5.2.1 行列式

$n\times n$ 行列 A の行列式（determinant）は

$$\det A\equiv\sum_P(\operatorname{sgn}P)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{A.146}$$

で定義される．ここで，P は $(1,2,\cdots,n)$ から $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ への置換を表し，$\operatorname{sgn}P$ は P が偶置換のとき 1，奇置換のとき -1 である．$\det A$ は $|A|$ とも表記される．具体例として，(A.142) の A の行列式は

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \tag{A.147}$$

である．また，単位行列 I の行列式は $\det I=1$ である．

任意の $n\times n$ 行列 A，B に関して，

$$\det(AB)=\det A\det B \tag{A.148}$$

が成り立つ．また，正則行列 A に関して，$A^{-1}A=AA^{-1}=I$ より，

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tag{A.149}$$

が成り立つ．

A.5.2.2　トレース（対角和）

$n \times n$ 行列 A のトレース（trace）は

$$\mathrm{tr}\, A \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{A.150}$$

で定義される．任意の $n \times n$ 行列 A_k（$k = 1, 2, 3, \cdots, m$）に関して，

$$\mathrm{tr}(A_1 A_2 A_3 \cdots A_m) = \mathrm{tr}(A_2 A_3 \cdots A_m A_1) \tag{A.151}$$

が成り立つ．

A.5.3　固有値問題

$n \times n$ 行列 A に対して，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{A.152}$$

が成り立つとき，λ を**固有値**（eigenvalue），$\boldsymbol{x}$ を固有値 λ に関する固有ベクトル（eigenvector）とよぶ．(A.152) は**固有値方程式**，A の固有値と固有ベクトルを求める問題は**固有値問題**とよばれる．

(A.152) は $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と変形され，零ベクトル $\boldsymbol{0}$ ではない固有ベクトルが存在するための必要十分条件は $\det(\lambda I - A) = 0$ で与えられる．実際，$\det(\lambda I - A) \neq 0$ のときは $(\lambda I - A)$ の逆行列が存在し，それを左から $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に作用させることにより $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が導かれる．$\det(\lambda I - A) = 0$ は**特性方程式**とよばれる固有値に関する n 次方程式で，この方程式を解くことにより固有値が得られる．

$n \times n$ 行列 A に対して，正則行列 S に関する変換

$$A' = S^{-1} A S \tag{A.153}$$

は**相似変換**とよばれる．(A.148)，(A.149) を用いて，

$$\det(\lambda I - A') = \det(S^{-1}(\lambda I - A)S) = \det(\lambda I - A) \tag{A.154}$$

が導かれ，これより A' の固有値は A のものと同じであることがわかる．そこで，A がある正則行列 S により対角行列

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv A_{\mathrm{D}} \tag{A.155}$$

に変換されたとする．このように行列が相似変換を通して対角型になるとき，**対角化可能**とよぶ．ここで，対角成分の値 λ_i（$i=1,2,\cdots,n$）が固有値となる．また，$S=(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\cdots,\boldsymbol{s}_n)$ と表記したとき，各列ベクトル $\boldsymbol{s}_i$ がそれぞれ λ_i に関する固有ベクトルとなる．実際，$A\boldsymbol{s}_i=\lambda_i\boldsymbol{s}_i$ とすると，

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= S^{-1}(A\boldsymbol{s}_1,A\boldsymbol{s}_2,\cdots,A\boldsymbol{s}_n)=S^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{s}_1,\lambda_2\boldsymbol{s}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{s}_n)\\ &= S^{-1}(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\cdots,\boldsymbol{s}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}\\ &= S^{-1}S\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}=A_{\mathrm{D}} \end{aligned} \tag{A.156}$$

が成り立つ．

$n\times n$ 行列 A に対して，

$$A^\dagger A=AA^\dagger \tag{A.157}$$

が成り立つとき，A は**正規行列**（normal matrix）とよばれる．正規行列の例としてエルミート行列，反エルミート行列，ユニタリー行列などがある．**正規行列はユニタリー変換とよばれるユニタリー行列による相似変換により対角化される**（証明は省略）．参考までに，**任意の $n\times n$ 複素行列 M は 2 つの $n\times n$ ユニタリー行列 U_1，U_2 を用いて，$U_1^\dagger MU_2=M_{\mathrm{D}}$**（$M_{\mathrm{D}}$：$n\times n$ 対角行列）**のように対角化される**（証明は省略）．

量子論において，エルミート行列が重要な役割を演じる．ここで，エルミート行列の性質を証明抜きで列挙する．

- エルミート行列とは $H^\dagger=H$ を満たす行列 H である．
- エルミート行列はユニタリー変換 $U^\dagger HU$ により対角化される．ここで，U はユニタリー行列で $U^\dagger=U^{-1}$ を満たす．
- エルミート行列の固有値 λ は実数，すなわち，$\lambda^*=\lambda$ である．
- エルミート行列の異なる固有値 λ_1，λ_2 に関する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ は直交する．すなわち，内積が 0（$\boldsymbol{u}_1^\dagger\cdot\boldsymbol{u}_2=0$）である．
- エルミート行列の固有ベクトルを用いて，完全正規直交系が構成できる．
- 2 つのエルミート行列 H_1，H_2 が同時に対角化されるための必要十分条件は $H_1H_2=H_2H_1$ である．

ここで，完全正規直交系について説明する．n 次元ベクトル空間の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$（$i=1,\cdots,n$）とする．$\boldsymbol{e}_i$ が正規直交性を有するとは，内積に関

して，

$$\boldsymbol{e}_i^\dagger \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{A.158}$$

が成り立つことである．ここで，正規は $\boldsymbol{e}_i$ のノルム（ベクトルの大きさ）が 1 であること，直交は異なる基底ベクトルが直交することを意味する．また，$\{\boldsymbol{e}_i\}$ が完全系を構成しているとは，任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{e}_i$ を用いて，

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i \tag{A.159}$$

のように表されることである．ここで，v_i は $\boldsymbol{v}$ の i 成分で，

$$v_i = \boldsymbol{e}_i^\dagger \cdot \boldsymbol{v} \tag{A.160}$$

が成り立つ．さらに，(A.159) と (A.160) を組み合わせて，

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \left(\boldsymbol{e}_i^\dagger \cdot \boldsymbol{v}\right) \tag{A.161}$$

が成り立ち，これより

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^\dagger = I \tag{A.162}$$

が導かれる．ここで，I は $n \times n$ 単位行列である．(A.162) は**完全性**とよばれ，$\{\boldsymbol{e}_i\}$ が完全系を構成するための条件式である．(A.162) の実例として，実 3 次元空間上の 3 つの基底ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.163}$$

に対して，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1,0,0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0,1,0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0,0,1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned} \tag{A.164}$$

A.5.4 無限次元空間

無限次元のベクトル空間の元 $\boldsymbol{v}$ のノルムを，

$$\sqrt{\boldsymbol{v}^\dagger \cdot \boldsymbol{v}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^* v_i\right)^{1/2} \tag{A.165}$$

と定義する．このとき，ノルムが有限なベクトルの集合は線形空間を構成し，**ヒルベルト空間**とよばれる線形空間の一例となる．

関数を元とする関数空間を紹介する．簡単のため，$-a \leq x \leq a\,(x \in \boldsymbol{R})$ で定義された関数 $f(x)$ で，

$$\int_{-a}^{a} f^*(x)f(x)dx < \infty \tag{A.166}$$

を満たす関数全体の集合を扱う．そこで，2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積を

$$(f, g) = \int_{-a}^{a} f^*(x)g(x)dx \tag{A.167}$$

で定義する．

「関数」を「ベクトル」とみなすことにより，基底ベクトルの対応物として，

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_{-a}^{a} \phi_m^*(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n), \end{cases} \tag{A.168}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\phi_n^*(y) = \delta(x - y) \tag{A.169}$$

を満たす無限個の関数の組 $\{\phi_n\}$（n：整数）を導入する．ここで，$\delta(x-y)$ はディラックの δ 関数である．ベクトルのときと同様に，$\{\phi_n\}$ は完全正規直交系とよばれる．(A.169) は完全性とよばれ，$\{\phi_n\}$ が完全系を構成するための条件式で，(A.160) と (A.161) の対応物

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\phi_n(x), \quad f_n = (\phi_n, f) = \int_{-a}^{a} \phi_n^*(y)f(y)dy \tag{A.170}$$

を組み合わせた式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x)f_n = \int_{-a}^{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\phi_n^*(y)f(y)dy \tag{A.171}$$

から導かれる．ここで，和と積分の順序を入れ換えた．

A.5.2 項でみたように，「行列」によりベクトルがベクトルに写された．行列の対応物は「演算子」で，例えば，微分演算子 $\dfrac{d}{dx}$ や積分核 $K(x, y)$ により，関数 $f(x)$ が

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \int K(x,y)f(y)dy \tag{A.172}$$

のように関数に写される．演算子 $\hat{O}$ により関数 $f(x)$，$g(x)$ がそれぞれ $\tilde{f}(x)$，$\tilde{g}(x)$ に写ったとする．任意の定数 c_1，c_2 に対して，$c_1 f(x) + c_2 g(x)$ が $\hat{O}$ により $c_1\tilde{f}(x) + c_2\tilde{g}(x)$ に写されるとき，$\hat{O}$ は**線形演算子**とよばれる．

行列のときと同様に，線形演算子 $\hat{A}$ に関する固有値問題

$$\hat{A}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x) \tag{A.173}$$

が設定される．ここで，λ_n は固有値，$\phi_n(x)$ は固有値 λ_n に関する**固有関数**（eigenfunction）である．量子力学では，ハミルトニアンとよばれるエネルギー演算子 $\hat{H}$ に関する固有値問題 $\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n$ が特に重要となる．

$\hat{A}$ は内積

$$\left(\phi_m, \hat{A}\phi_n\right) = \int \phi_m^*(x)\hat{A}\phi_n(x)dx \equiv a_{mn} \tag{A.174}$$

を通して，無限次元の行列 A の成分と関係付けられる．エルミート行列の関係式 $a_{nm}^* = a_{mn}$ を満たすような演算子，すなわち，

$$\begin{aligned}\left(\int \phi_n^*(x)\hat{A}\phi_m(x)dx\right)^* &= \left(\hat{A}\phi_m, \phi_n\right) \\ &= \left(\phi_m, \hat{A}\phi_n\right) = \int \phi_m^*(x)\hat{A}\phi_n(x)dx\end{aligned} \tag{A.175}$$

が成り立つような $\hat{A}$ は**エルミート演算子**（Hermitian operator）とよばれる．

行列 A の成分 a_{mn} とエルミート共役行列 $A^\dagger(=(A^t)^* = (A^*)^t)$ の成分 $a_{mn}^\dagger$ の間に $a_{mn}^\dagger = a_{nm}^*$ が成り立ち，この関係式と (A.174) より，

$$\begin{aligned}\int \phi_m^*(x)\hat{A}^\dagger\phi_n(x)dx &= \left(\int \phi_n^*(x)\hat{A}\phi_m(x)dx\right)^* \\ &= \int (\hat{A}\phi_m(x))^*\phi_n(x)dx\end{aligned} \tag{A.176}$$

すなわち，

$$\left(\phi_m, \hat{A}^\dagger\phi_n\right) = \left(\hat{A}\phi_m, \phi_n\right) \tag{A.177}$$

を満たす演算子 $\hat{A}^\dagger$ が定義され，$\hat{A}$ の**エルミート共役演算子**（Hermitian conjugate operator）とよばれる．エルミート演算子とエルミート共役演算子の違いに注意しよう．$\left(\phi_m, \hat{A}^\dagger\phi_n\right) = \left(\phi_m, \hat{A}\phi_n\right)$ を満たす演算子がエルミート演算子である．

量子論において，しばしば，波動関数 $\psi(x)$（x：座標変数）をケットベクトルとよばれる状態ベクトル $|\psi\rangle$ で，波動関数の複素共役 $\phi^*(x)$ をブラベクトルとよばれる状態ベクトル $\langle\phi|$ で代用する．正確には，

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \quad \phi^*(x) = \langle\phi|x\rangle \tag{A.178}$$

が成り立つ．ここで，$|x\rangle$ は位置演算子 $\hat{x}$ に関する固有値方程式

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \tag{A.179}$$

の解，すなわち，$\hat{x}$ の固有値 x の固有ベクトルである．$|x\rangle$ は関係式

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|dx = 1 \tag{A.180}$$

を満たし，基底ベクトルの役割を果たす．実際，ベクトル $\boldsymbol{v}$ との間に対応関係

$$\text{ベクトル}：\boldsymbol{v} \leftrightarrow |\psi\rangle,$$

$$\text{基底ベクトル}：\boldsymbol{e}_i \leftrightarrow |x\rangle,\quad \text{成分}：\boldsymbol{e}_i^\dagger \cdot \boldsymbol{v} \leftrightarrow \langle x|\psi\rangle (= \psi(x)) \tag{A.181}$$

が存在し，$\psi(x)$ は $|\psi\rangle$ を $|x\rangle$ を用いて展開したときの展開係数で，(A.180) の第 2 式を用いて，

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)|x\rangle dx \tag{A.182}$$

と表される．さらに，(A.182) に対して，左から $\langle x|$ を掛けて，(A.180) の第 1 式を用いて，

$$\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\psi(x')dx' = \psi(x) \tag{A.183}$$

のように成分として $\psi(x)$ が取り出される．

ベクトルの成分が基底ベクトルの選び方に依存することを思い出そう．実際，$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$ の解である運動量の固有状態 $|p\rangle$ を基底ベクトルとして選ぶと展開係数として運動量を変数にもつ波動関数が得られる．

$\langle\phi|\psi\rangle$ や $\langle\phi_m|\hat{A}|\phi_n\rangle$ は位置表示（$|x\rangle$ を基底ベクトルとする表示）において，

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int \langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx = \int \phi^*(x)\psi(x)dx, \tag{A.184}$$

$$\begin{aligned}\langle\phi_m|\hat{A}|\phi_n\rangle &= \int \langle\phi_m|x\rangle\langle x|\hat{A}|x'\rangle\langle x'|\phi_n\rangle dxdx' \\ &= \int \phi_m^*(x)\hat{A}\delta(x-x')\phi_n(x')dxdx' = \int \phi_m^*(x)\hat{A}\phi_n(x)dx \end{aligned}\tag{A.185}$$

のように内積や行列要素を表す．ケットベクトルとブラベクトルを用いて，(A.168)，(A.169) はそれぞれ

$$\langle\phi_m|\phi_n\rangle = \delta_{mn},\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = 1 \tag{A.186}$$

と表記される．完全性の条件式の成立は (A.170) に対応する表記

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n|\phi_n\rangle,\quad a_n = \langle\phi_n|\psi\rangle \tag{A.187}$$

とこれらを組み合わせた式

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\phi_n\rangle a_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle \tag{A.188}$$

から理解される．(A.186) では m，n は離散的な値を取るが，連続的な値を取る場合は変数を x とすると (A.180) に代わる．

A.6 ベクトル解析

ベクトル解析とは，空間上のベクトル関数などに関する微積分を扱う数学の

分野で，電磁気学，流体力学などの定式化に活用される．ここでは，直交座標系に基づいて紹介する．

A.6.1 勾配，発散，回転

A.6.1.1 勾配

スカラー関数 $\phi(x,y,z)$ の変数 x，y，z に関する偏微分

$$\frac{\partial \phi}{\partial x},\quad \frac{\partial \phi}{\partial y},\quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{A.189}$$

は ϕ の**勾配**（gradient）とよばれ，

$$\boldsymbol{\nabla}\phi,\quad \text{あるいは}\quad \mathrm{grad}\,\phi \tag{A.190}$$

と表される．すなわち，

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x},\ \frac{\partial \phi}{\partial y},\ \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \tag{A.191}$$

である．ここで，$\boldsymbol{\nabla}$ はナブラと発音される微分演算子である．

具体例として，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の勾配は

$$\boldsymbol{\nabla}r = \left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{A.192}$$

すなわち，$\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ である．ここで，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ である．

A.6.1.2 発散

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(A_x,A_y,A_z)$ に対して，

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A.193}$$

は $\boldsymbol{A}$ の**発散**（divergence）とよばれ，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A},\quad \text{あるいは}\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \tag{A.194}$$

と表される．すなわち，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A.195}$$

である．発散は図 A.7 のような 1 辺の長さが $\varDelta l$ の微小立方体の表面 S から出ている $\boldsymbol{A}$ の積分量に等しいことが，

$$\begin{aligned}\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} &\doteqdot A_x(x+\varDelta l,y,z)\varDelta l^2 - A_x(x,y,z)\varDelta l^2\\ &\quad +A_y(x,y+\varDelta l,z)\varDelta l^2 - A_y(x,y,z)\varDelta l^2\\ &\quad +A_z(x,y,z+\varDelta l)\varDelta l^2 - A_z(x,y,z)\varDelta l^2\\ &\doteqdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\varDelta l^3\end{aligned} \tag{A.196}$$

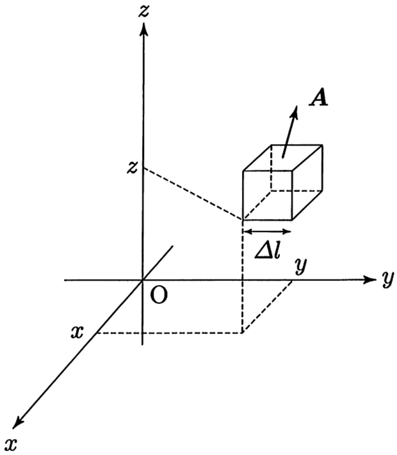


図 A.7　ベクトル関数の発散.

のような近似に基づく評価から理解される.

例えば，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\phi = \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)$ の発散は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{A.197}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ は**ラプラス演算子**または**ラプラシアン**（Laplacian）とよばれる微分演算子で，Δ と記されることもある．ちなみに，$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = 0$ は**ラプラス方程式**（Laplace equation）とよばれている．参考までに，$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})$ は異なることに注意しよう．

A.6.1.3　回転

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$ に対して，

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{A.198}$$

は $\boldsymbol{A}$ の**回転**（rotation）とよばれ，

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \quad \text{あるいは} \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{A.199}$$

と表される．すなわち，

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{A.200}$$

である．回転の z 成分は図 A.8 のような微小な長方形の辺 C 上で $\boldsymbol{A}$ を線積分した量に等しいことが，

$$\begin{aligned}\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \doteqdot\ & A_x(x, y, z)\Delta x + A_y(x + \Delta x, y, z)\Delta y \\ & - A_x(x, y + \Delta y, z)\Delta x - A_y(x, y, z)\Delta y\end{aligned}$$

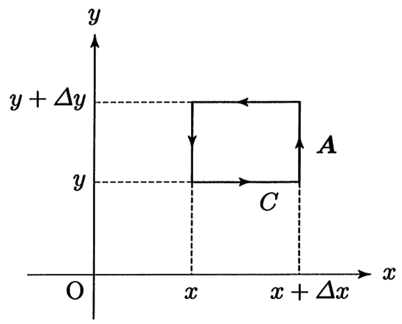


図 A.8　ベクトル関数の回転.

$$\fallingdotseq \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y \tag{A.201}$$

のような近似に基づく評価から理解される.

例えば, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$ の回転は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right) \\ &= \boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{A.202}$$

である. さらに, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ の発散は次のような計算により 0 となる.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0.\end{aligned} \tag{A.203}$$

A.6.1.4　様々な公式

ϕ, ψ をスカラー関数, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ をベクトル関数とする. 以下のような公式が成り立つ.

$$\boldsymbol{\nabla}(\phi\psi) = (\boldsymbol{\nabla}\phi)\psi + \phi\boldsymbol{\nabla}\psi, \tag{A.204}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\phi\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}\phi) \cdot \boldsymbol{A} + \phi\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}, \tag{A.205}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\phi\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}\phi) \times \boldsymbol{A} + \phi\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \tag{A.206}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = &(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \\ &+ \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}),\end{aligned} \tag{A.207}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}), \tag{A.208}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = &(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} \\ &+ (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B},\end{aligned} \tag{A.209}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{0}, \tag{A.210}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0, \tag{A.211}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}. \tag{A.212}$$

A.6.2 積分に関する定理

A.6.2.1 ガウスの発散定理

3 次元の領域 V 上のベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ に関して,

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d^3 r = \oint_{\partial \mathrm{V}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.213}$$

が成り立つ．ここで，∂V は V の表面で 2 次元の閉曲面である（図 4.5 参照）．また，$d\boldsymbol{S}$ は微小面積要素の面積 dS と面に垂直な単位法線ベクトル $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ を用いて $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} dS$ と表される．

A.6.2.2 ストークスの回転定理

2 次元の領域（曲面）S 上のベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ に関して,

$$\int_{\mathrm{S}} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\partial \mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{A.214}$$

が成り立つ．ここで，∂S は S の境界で閉曲線である（図 4.7 参照）．

A.7 群論

A.7.1 群とは

群（group）とは以下の公理を満たす「もの」の集合である．

1. 集合 G の任意の元（element）g，h に対して，G の元を一意的に定める規則（積，あるいは合成とよばれ，gh と記される）が与えられる．
2. G の任意の元 g，h，k に対して，積に関して，**結合則**とよばれる性質 $(gh)k = g(hk)$ が成り立つ．
3. G の任意の元 g に対して，$ge = eg = g$ を満たす元 e が 1 つだけ存在し，**単位元**とよばれる．
4. G の任意の元 g に対して，$gg^{-1} = g^{-1}g = e$ を満たす元 g^{-1} が 1 つだけ存在し，g の**逆元**とよばれる．

A.7.2 リー群

物理系がある変換のもとで不変な場合，系が**不変性**，あるいは**対称性**を有するといわれる．物理系を不変に保つ変換はしばしば群をなす．この場合，「もの」は変換を指し，**変換群**とよばれることもある．変換を受ける対象として，物理量 $\boldsymbol{x}$，場の演算子 Ψ，状態 $|\psi\rangle$ などがある．

群の元が連続的に変化するパラメータで指定される群は**連続群**（continuous

group）とよばれる．パラメータの近さが群の元の近さを意味する．連続群 G の元を n 個のパラメータ θ^a（$a=1,\cdots,n$）で指定し，$g(\theta)$ と表すことにする．このとき，独立なパラメータの数 n は群の**次元**とよばれる．群の公理から以下のような性質が導かれる．

1. G の元 $g(\theta)$，$g(\varphi)$ に対して，積 $g(\theta)g(\varphi)=g(\xi)(\in G)$ が与えられる．積は写像 $\xi=F(\theta,\varphi)$ により決まる．
2. G の元 $g(\theta)$，$g(\varphi)$，$g(\xi)$ に対して，結合則 $(g(\theta)g(\varphi))g(\xi) = g(\theta)(g(\varphi)g(\xi))(\in G)$ が成り立つ．この関係式は写像が $F(F(\theta,\varphi),\xi) = F(\theta,F(\varphi,\xi))$ という性質をもつことを意味する．
3. G の単位元は $g(0)$ で，任意の元 $g(\theta)$ に対して，$g(\theta)g(0)=g(0)g(\theta)= g(\theta)$ を満たす．この関係式は写像が $F(\theta,0)=F(0,\theta)=\theta$ という性質をもつことを意味する．
4. G の任意の元 $g(\theta)$ の逆元 $g^{-1}(\theta)=g(\tilde{\theta})$ に対して，$g(\theta)g(\tilde{\theta})=g(\tilde{\theta})g(\theta)= g(0)$ が成り立つ．この関係式は写像が $F(\theta,\tilde{\theta})=F(\tilde{\theta},\theta)=0$ という性質をもつことを意味する．

さらに，写像がパラメータに関して連続で微分可能な連続群は**リー群**（Lie group）とよばれる．群は行列を用いて表示される．リー群の元 $g(\theta)$ に対応する行列を $D(\theta)$ とする．単位元 $e=g(0)$ に対応する行列 $D(0)$ は単位行列 I である．$D(\theta)$ はパラメータに関して連続で微分可能なので，I のまわりで，

$$D(\theta) = I + \sum_{a=1}^{n} \theta^a \left.\frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta^a}\right|_{\theta=0} + \cdots \tag{A.215}$$

と表される．さらに，$D(\theta)$ は指数を用いて，

$$D(\theta) = \exp\left(\sum_{a=1}^{n} \theta^a X^a\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{a=1}^{n} \theta^a X^a\right)^m}{m!} \tag{A.216}$$

と表される．ここで，X^a（$a=1,\cdots,n$）は**リー代数**（Lie algebra），あるいは**リー環**の元で，(A.215)，(A.216) より，

$$X^a = \left.\frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta^a}\right|_{\theta=0} \tag{A.217}$$

である．積

$$\begin{aligned}
&D(\theta)D(\varphi)D(\theta)^{-1}D(\varphi)^{-1} \\
&= \exp\left(\sum_{a=1}^{n} \theta^a X^a\right)\exp\left(\sum_{b=1}^{n} \varphi^b X^b\right)\exp\left(-\sum_{a=1}^{n} \theta^a X^a\right)\exp\left(-\sum_{b=1}^{n} \varphi^b X^b\right) \\
&= \exp\left(\sum_{c=1}^{n} \xi^c X^c\right)
\end{aligned} \tag{A.218}$$

より，パラメータに関する関係式

$$\xi^c = \sum_{a,b=1}^{n} \tilde{f}^{abc} \theta^a \varphi^b + \cdots \tag{A.219}$$

表 A.1　主なリー群.

群	記号	群の元
複素特殊線形変換群	$SL(N,\boldsymbol{C})$	行列式が 1 の複素行列
ユニタリー群	$U(N)$	ユニタリー行列
特殊ユニタリー群	$SU(N)$	行列式が 1 のユニタリー行列
直交群	$O(N)$	直交行列
特殊直交群（回転群）	$SO(N)$	行列式が 1 の直交行列

が導かれる．ここで，$\tilde{f}^{abc}$ がリー代数の**構造定数**（structure constant）とよばれる定数で，リー代数の交換関係

$$[X^a, X^b] = \sum_{c=1}^{n} \tilde{f}^{abc} X^c \tag{A.220}$$

で定義される．また，(A.219) の $\cdots$ は θ，φ に関する高次の項でその係数は $\tilde{f}^{abc}$ により決まる．すなわち，(A.220) に基づいてリー群の構造が決まる．

主なリー群を表 A.1 に列挙する．

$SL(N,\boldsymbol{C})$ のリー代数の元はトレースが 0 （$\mathrm{tr}\, X^a = 0$）の行列である．$SU(N)$ のリー代数の元はトレースが 0 の反エルミート行列（$X^{a\dagger} = -X^a$）である．$SO(N)$ のリー代数の元はトレースが 0 の実交代行列（$X^{ta} = -X^a$, $X^{a*} = X^a$）である．行列式が 1 の群の元に関するリー代数の元のトレースが 0 であることは，

$$\det\exp\left(\sum_{a=1}^{n} \theta^a X^a\right) = \exp\left[\mathrm{tr}\left(\sum_{a=1}^{n} \theta^a X^a\right)\right] \tag{A.221}$$

からわかる．

群の作用のもとで不変量が存在する．例えば，$|z^1|^2 + |z^2|^2 + \cdots + |z^N|^2$（$z^k$：複素数）を不変に保つ線形変換 $z'^k = \sum_{l=1}^{N} U^k{}_l z^l$ が成す群は $U(N)$ である．すなわち，$U^k{}_l$ は $N \times N$ ユニタリー行列である．さらに，$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^N)^2$（$x^k$:実数）を不変に保つ線形変換 $x'^k = \sum_{l=1}^{N} O^k{}_l x^l$ が成す群は $O(N)$ である．すなわち，$O^k{}_l$ は $N \times N$ 直交行列である．

物理学において，リー代数として X^a の代わりに $T^a = -iX^a$ を用いることが多い．T^a は**生成子**（generator）とよばれる．このとき，$D(\theta)$ は

$$D(\theta) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{n} \theta^a T^a\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(i\sum_{a=1}^{n} \theta^a T^a\right)^m}{m!} \tag{A.222}$$

と表され，リー代数の交換関係は

$$[T^a, T^b] = i\sum_{c=1}^{n} f^{abc} T^c \tag{A.223}$$

で定義される．ここで，$f^{abc} = -\tilde{f}^{abc}$ である．以後，f^{abc} をリー代数の構造定数とよぶことにする．$D(\theta)$ がユニタリー行列の場合，θ^a は実数のパラメータで T^a はエルミート行列である．以後，$D(\theta)$ がユニタリー行列の場合には，$D(\theta)$ の代わりに $U(\theta)$ と記す（ユニタリー群を表す $U(N)$ と混同しないように注意しよう）．

(A.223) を満たす $r \times r$ 行列による表現は G の $\boldsymbol{r}$ 表現（または $\boldsymbol{r}$ 次元表現）とよばれる．また，$r \times r$ 行列が作用する対象は r 個の成分をもつ量で $\boldsymbol{r}$ 重項とよばれ，それを ψ と記すと，

$$\psi' = U(\theta)\psi = \exp\left(i\sum_{a=1}^{n}\theta^a T^a\right)\psi \tag{A.224}$$

のように変換する．$\boldsymbol{r}$ 表現，あるいは $\boldsymbol{r}$ 重項を $\boldsymbol{r}$ と略記される場合もある（位置ベクトルと混同しないようにしよう）．(A.223) の複素共役を取ることにより，

$$\left[-(T^a)^*, -(T^b)^*\right] = i\sum_{c=1}^{n} f^{abc}(-(T^c)^*) \tag{A.225}$$

が導かれ，$-(T^a)^*$ も (A.223) を満たすことがわかる．$-(T^a)^*$ を表現行列とする表現は $\boldsymbol{r}$ の**複素共役表現**（complex conjugate representation），あるいは $\boldsymbol{r}^*$ 表現（または $\overline{\boldsymbol{r}}$ 表現）とよばれ，$\boldsymbol{r}^*$（または $\overline{\boldsymbol{r}}$）と表記される．(A.224) の複素共役を取ることにより，

$$\psi'^* = \exp\left(i\sum_{a=1}^{n}\theta^a(-(T^a)^*)\right)\psi^* \tag{A.226}$$

が得られ，粒子 ψ が $\boldsymbol{r}$ 表現に従うならば，その反粒子（ψ^* に特定の因子がかかったもの）は $\boldsymbol{r}^*$ 表現に従うことがわかる．

次元が n のリー群 G について，そのリー代数の構造定数 f^{abc} を用いて，

$$(T^a)_{bc} = -if^{abc} \tag{A.227}$$

のように構成される $n \times n$ 行列は (A.223) を満たす．このことは，**ヤコビの恒等式**（Jacobi's identity）

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0, \tag{A.228}$$

すなわち，

$$\sum_{d=1}^{n}\left(f^{ade}f^{bcd} + f^{bde}f^{cad} + f^{cde}f^{abd}\right) = 0 \tag{A.229}$$

を用いて示される．実際，(A.229) において，c を d，d を c と書き換えてから変形すると，

$$\sum_{c=1}^{n}\left((-if^{adc})(-if^{bce}) - (-if^{bdc})(-if^{ace})\right) = i\sum_{c=1}^{n} f^{abc}(-if^{cde}) \tag{A.230}$$

が導かれ，(A.227) が (A.223) を満たすことがわかる．(A.227) を表現行列とする表現は G の**随伴表現**（adjoint representation）とよばれ，n 成分をもつ量 ϕ^b（$b=1,\cdots,n$）に対して，

$$\phi'^b = \sum_{c=1}^{n} \exp\left(i\sum_{a=1}^{n}\theta^a T^a_{\rm ad}\right)_{bc} \phi^c \tag{A.231}$$

のように変換する．ここで，随伴表現の表現行列を $T^a_{\rm ad}$ と記した．ϕ^a（$a=1,\cdots,n$）の代わりに，任意の表現行列 $(T^a)_{ij}$ を用いた表記

$$\phi_{ij} = \sum_{a=1}^{n} \phi^a (T^a)_{ij} \tag{A.232}$$

に基づいて，ϕ_{ij} が (A.231) の変換のもとで，

$$\phi_{ij} = \sum_{k,l} U_{ik}\phi_{kl}U^\dagger_{lj}, \quad U_{ij} = \exp\left(i\sum_{a=1}^{n}\theta^a T^a\right)_{ij} \tag{A.233}$$

のように変換することが，公式

$$e^B A e^{-B} = A + [B,A] + \frac{1}{2!}[B,[B,A]] + \cdots = (\exp({\rm ad}\, B))A \tag{A.234}$$

と (A.223) を用いて示される．ここで，$({\rm ad}\,B)A = [B,A]$ である．

ランク（rank）とは同時に対角化可能な生成子の数である．同時に対角化可能な生成子はカルタン部分代数の元とよばれる．また，すべての生成子と交換する行列は**カシミール演算子**（Casimir operator）とよばれる．一般にカルタン部分代数とカシミール演算子の固有値を用いて，状態が指定される．例えば，$SU(N)$ に関して，

$$\sum_{a=1}^{n} (T^a(\boldsymbol{r})T^a(\boldsymbol{r}))_{ij} = C_2(\boldsymbol{r})\delta_{ij}, \quad {\rm tr}(T^a(\boldsymbol{r})T^b(\boldsymbol{r})) = T(\boldsymbol{r})\delta^{ab} \tag{A.235}$$

を成分とする行列は対角行列でカシミール演算子となる．ここで，$T^a(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ 表現に関する表現行列である．参考までに，$C_2(\boldsymbol{N^2-1}) = N$，$T(\boldsymbol{N}) = T(\boldsymbol{N}^*) = \dfrac{1}{2}$ である．ここで，$\boldsymbol{N^2-1}$ は随伴表現を意味する．以下で $U(1)$，$SU(2)$，$SU(3)$ を例に取って説明を加える．

A.7.2.1 $U(1)$

$U(1)$ の次元は 1 で，元は大きさが 1 の複素数で $U(\theta) = e^{i\theta}$（θ：実数）のように表記される．リー代数の元を明記したい場合は $U(\theta) = e^{i\theta Q}$ とすればよい．ここで，Q はリー代数の元で実数値を取り，交換関係 $[Q,Q]=0$ を満たす．$U(1)$ のランクは 1 である．積は $U(\theta)U(\varphi) = e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} = U(\xi)$ となり，$\xi = \theta+\varphi$ が成り立つ．また，任意の元に対して，$U(\theta)U(\varphi) = U(\varphi)U(\theta)$ が成り立ち，このような積の可換性を有する群は一般に**可換群**，あるいは**アーベル群**（Abelian group）とよばれる．群の積の結合則は実数の和の結合則

$(\theta+\varphi)+\xi=\theta+(\varphi+\xi)$ より自明に成り立つ．単位元は $U(0)=e^0=1$ で，$U(\theta)=e^{i\theta}$ の逆元は $U^{-1}(\theta)=e^{-i\theta}$ である．

A.7.2.2 $SU(2)$

$SU(2)$ の次元は 3 で，元は 3 つの実数 θ^a （$a=1,2,3$）を用いて，

$$U(\theta)=\exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\theta^a T^a\right) \tag{A.236}$$

と表され，リー代数の交換関係は

$$\left[T^a,T^b\right]=i\sum_{c=1}^{3}\varepsilon^{abc}T^c \tag{A.237}$$

で与えられる．ここで，ε^{abc} は 3 つの添字に関して完全反対称で $\varepsilon^{123}=1$ である．行列の積の非可換性より，$SU(2)$ の場合，一般に $U(\theta)U(\varphi)\neq U(\varphi)U(\theta)$ となる．このような積の非可換性を有する群は**非可換群**（non-Abelian group）とよばれる．(A.237) を満たす行列はどんな正方行列においても存在する．通常，$SU(2)$ の **2** 表現に関するリー代数の元として，

$$T^a=\frac{\tau^a}{2} \tag{A.238}$$

が用いられる．ここで，τ^a は**パウリ行列**とよばれるエルミート行列で，

$$\tau^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \tau^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \tau^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{A.239}$$

で与えられる．対角行列は τ^3 のみで，$SU(2)$ のランクは 1 である．

(A.237) を満たす 2×2 行列として $-\dfrac{(\tau^a)^*}{2}$ が考えられるが，これは (A.238) と相似変換

$$-\frac{(\tau^a)^*}{2}=S^{-1}\frac{\tau^a}{2}S,\quad S=i\tau^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \tag{A.240}$$

により結ばれているので，

$$\exp\left(-i\sum_{a=1}^{3}\theta^a\frac{(\tau^a)^*}{2}\right)=S^{-1}\exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\theta^a\frac{\tau^a}{2}\right)S \tag{A.241}$$

が導かれ，**2** 表現と同値である．すなわち，$SU(2)$ のもとで ψ と $S\psi^*$ は同じ変換をする．

A.7.2.3 $SU(3)$

$SU(3)$ の次元は 8 で，元は 8 つの実数 θ^a （$a=1,\cdots,8$）を用いて，

$$U(\theta)=\exp\left(i\sum_{a=1}^{8}\theta^a T^a\right) \tag{A.242}$$

と表され，リー代数の交換関係は

$$[T^a, T^b] = i\sum_{c=1}^{8} f^{abc}T^c \tag{A.243}$$

で与えられる．(A.243) を満たす行列はある特定の行数をもつ正方行列において存在する．$SU(3)$ の **3** 表現に関するリー代数の元として，

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \tag{A.244}$$

が用いられる．ここで，λ^a はゲルマン行列とよばれるエルミート行列で，

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{A.245}$$

で与えられる．このとき，リー代数の構造定数は

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = \frac{1}{2},$$
$$f_{156} = f_{367} = -\frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{その他は } 0 \tag{A.246}$$

である．ここで，3 つの添字については完全反対称である．

A.7.3 スピノル

A.4 節でみたように，3 次元ユークリッド空間において，空間回転のもとでの変換性を用いて，スカラー，ベクトルを特別な場合として含む，テンソルとよばれる量が定義された．空間回転のもとである定まった変換性を示す量はテンソルのみで尽きるわけではなく，**スピノル**（spinor）とよばれる量が存在する．A.4 節に基づき行列の添字について上付きと下付きを併用する．

3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ の変換性の復習から始める．$\boldsymbol{x}$ の成分 x^i（$i = 1, 2, 3$）は空間回転のもとで，

$$x'^i = \sum_{j=1}^{3} O^i{}_j x^j \tag{A.247}$$

と変換する．ここで，$O^i{}_j$ は

$$\sum_{i=1}^{3} O^i{}_j O^i{}_k = \delta_{jk}, \quad \sum_{k=1}^{3} O^i{}_k O^j{}_k = \delta^{ij}, \quad \det O^i{}_j = 1 \tag{A.248}$$

を満たす実定数を成分にもつ 3×3 行列で群を成し，**3 次元特殊直交群（回転群）**とよばれ，$SO(3)$ と表記される．

$SO(3)$ の次元は 3 で，その元を $O(\theta)$ と記し指数関数を用いて，

$$O(\theta) = \exp\left(i \sum_{a=1}^{3} \theta^a T^a\right) \tag{A.249}$$

と表す．ここで，T^a は $SO(3)$ の生成子で，

$$[T^a, T^b] = i \sum_{c=1}^{3} \varepsilon^{abc} T^c \qquad (a, b = 1, 2, 3) \tag{A.250}$$

に従う．

(A.247) の変換は随伴表現に関する変換で，その表現行列は

$$(T^a)^b{}_c = -i\varepsilon^{abc} \equiv (T^a_{\text{ad}})^b{}_c \tag{A.251}$$

で与えられる．(A.251) を成分表示すると，

$$T^1_{\text{ad}} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2_{\text{ad}} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^3_{\text{ad}} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.252}$$

となる．これを用いて，$\boldsymbol{\theta} = (0, 0, \theta)$ のとき，

$$O(\theta) = \exp\left(i\theta T^3_{\text{ad}}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.253}$$

となり，z 軸のまわりの角度 θ の回転を表すことがわかる．ちなみに，$\exp\left(i \sum_{a=1}^{3} \theta^a T^a_{\text{ad}}\right)$ は $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ の方向を軸とする角度 $|\boldsymbol{\theta}|$ の回転を表す．

(A.250) は $SU(2)$ のリー代数の交換関係と同じなので，（単位元の近傍で）2×2 表現行列

$$U(\theta) = \exp\left(i \sum_{a=1}^{3} \theta^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \tag{A.254}$$

を用いて表すこともできる．ここで，σ^a はパウリ行列である．パウリ行列は

トレースが 0 のエルミート行列であるから，$U(\theta)$ は 2 次元特殊ユニタリー群 $SU(2)$ の元である．

2π 回転のもとで，$O(\theta)$ は不変であるが $U(\theta)$ は符号を変えることから予想されるように，$SU(2)$ の元と $SO(3)$ の元の間には，2 対 1 対応

$$U(\theta) = \pm \exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\theta^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \leftrightarrow O_{\mathrm{ad}}(\theta) \equiv \exp\left(i\sum_{a=1}^{3}\theta^a T_{\mathrm{ad}}^a\right) \quad \text{(A.255)}$$

が存在し，$SU(2)$ の表現は $SO(3)$ の**二価表現**となる．具体的には，$O_{\mathrm{ad}}(\theta)$ に対して，

$$U^\dagger(\theta)\sigma^a U(\theta) = \sum_{b=1}^{3}(O_{\mathrm{ad}}(\theta))^a{}_b \sigma^b \quad \text{(A.256)}$$

を満たす $U(\theta)$ が存在することが知られている．このとき，$\boldsymbol{x}$ に対して，パウリ行列（**2** 表現の表現行列を 2 倍したもの）を用いた表記

$$X \equiv \sum_{a=1}^{3} x^a \sigma^a = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \quad \text{(A.257)}$$

を定義する．X は 2×2 エルミート行列で，$\operatorname{tr} X = 0$ および $\det X = -\boldsymbol{x}^2$ が成り立つ．X は空間回転のもとで，

$$X' = \sum_{a=1}^{3} x'^a \sigma^a = \sum_{a,c=1}^{3}(O_{\mathrm{ad}}(\theta))^a{}_c x^c \sigma^a = U(\theta) X U^\dagger(\theta) \quad \text{(A.258)}$$

のように変換する．ここで，(A.256) から派生する公式

$$\sum_{a=1}^{3}(O_{\mathrm{ad}}(\theta))^a{}_c \sigma^a = U(\theta)\sigma^c U^\dagger(\theta) \quad \text{(A.259)}$$

を用いた．具体的には，(A.256) の両辺に左から $U(\theta)$ を，右から $U^\dagger(\theta)$ を掛けて，さらに $(O_{\mathrm{ad}}(\theta))^a{}_c$ を掛けて，a について和を取ることにより得られる．変形の際に $U(\theta)U^\dagger(\theta) = I$，$U^\dagger(\theta)U(\theta) = I$ および (A.248) の 1 番目の式を用いた．行列式やトレースの性質を用いて，(A.258) より $\operatorname{tr} X' = \operatorname{tr} X = 0$，$\det X' = -\boldsymbol{x}'^2 = -\boldsymbol{x}^2 = \det X$ が成り立つことがわかる．

$U(\theta)$ が作用する 2 成分量は，回転群の**基本スピノル**または**パウリスピノル**とよばれる．簡単のため，スピノルとよぶことにする．(A.255) より，スピノルは二価関数である．スピノルを

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{(A.260)}$$

と表記すると，ξ，$\xi^\dagger$ は空間回転のもとで，

$$\xi' = U(\theta)\xi, \quad \xi'^\dagger = \xi^\dagger U^\dagger(\theta) \quad \text{(A.261)}$$

と変換し，2π 回転のもとで

$$\xi' = U(2\pi)\xi = -\xi,\ \ \xi'^{\dagger} = \xi^{\dagger}U^{\dagger}(2\pi) = -\xi^{\dagger} \tag{A.262}$$

のように符号を変えることがわかる．(A.258) と (A.261) を組み合わせることにより，$\xi^{\dagger}X\xi$ が空間回転のもとで不変であることがわかる．さらに，(A.256) より，$\xi^{\dagger}\sigma^{a}\xi$ が空間回転のもとでベクトルの変換性を示すことがわかる．これはスピノルからベクトルが構成されることを意味する．

同様にして，4 次元ミンコフスキー時空上でも本義ローレンツ変換に基づいて，(この場合は) 2 種類の基本スピノル ξ，η^{*} が定義される．これらは本義ローレンツ変換のもとで，それぞれ

$$\xi'(x') = \exp\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\xi(x) \equiv a\xi(x), \tag{A.263}$$

$$\eta^{*\prime}(x') = \exp\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\eta^{*}(x) \equiv (a^{-1})^{\dagger}\eta^{*}(x) \tag{A.264}$$

と変換する．ここで，$\boldsymbol{\theta}$ は空間回転のパラメータで $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (-\omega^{23}, -\omega^{31}, -\omega^{12})$，$\boldsymbol{\omega}$ はローレンツブーストのパラメータで $\boldsymbol{\omega} = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03})$ である．a，$(a^{-1})^{\dagger}$ は $\omega^{\mu\nu}$ をパラメータとして含む 2×2 行列でいずれも複素特殊線形変換群 $SL(2,\boldsymbol{C})$ の元である．ξ と η^{*} は**ワイルスピノル**とよばれる．

2×2 単位行列 I とパウリ行列を含む 4 元量

$$\sigma^{\mu} \equiv (I, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (I, \boldsymbol{\sigma}),\ \ \overline{\sigma}^{\mu} \equiv (I, -\boldsymbol{\sigma}) \tag{A.265}$$

に関して，

$$a^{-1}\sigma^{\mu}(a^{-1})^{\dagger} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu},\ \ a^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}a = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\overline{\sigma}^{\nu} \tag{A.266}$$

が成り立つ．ここで，$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ は本義ローレンツ変換の変換行列である．(A.266) は (3.98) と等価である．(A.266) より，$\eta^{t}\sigma^{\mu}\eta^{*}$ や $\xi^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}\xi$ が本義ローレンツ変換のもとで 4 元ベクトルとして変換することがわかる．また，x_{μ} に対して，σ^{μ} を用いた表記

$$X \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x_{\mu}\sigma^{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \tag{A.267}$$

を定義する．X は 2×2 エルミート行列で，$\det X = \sum_{\mu=0}^{3} x_{\mu}x^{\mu}$ が成り立つ．X は本義ローレンツ変換のもとで，

$$X' = \sum_{\mu=0}^{3} x'_{\mu}\sigma^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu}\sigma^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} aXa^{\dagger} \tag{A.268}$$

のように変換する．(A.267) より $\det X' = \det X$ が成り立つことがわかる．

A.8 ファイバー束の幾何学

幾何学（geometry）とは与えられた変換群に属する変換のもとで不変に保たれる図形の性質を探究する学問である．ここで，「図形」をより一般的な対象に置き換えてみよう．例えば，「物理系」に置き換えた場合，「物理法則」の解明に幾何学や幾何学的な方法が適用される．

この節では，ゲージ理論の枠組が**ファイバー束**（fiber bundle）とよばれる空間に関する幾何学を用いて定式化されることを概観する．図 A.9 のように**底空間**とよばれる空間の各点に**ファイバー**とよばれる空間を張り付けて拡張した空間がファイバー束である．ファイバーには群 G をなす**同相写像**が存在する．G はファイバー束の構造群とよばれる．ここで，同相写像とは写像 T が全単射で，なおかつ T もその逆写像 T^{-1} も連続であるような写像のことである．底空間を時空とし，その座標を x^μ（または簡略化して x）とする．ファイバーは G の表現空間に相当し，その座標を f とする．ファイバー束上の場 Ψ は x と f を変数とするが，煩雑になるので，f を明記せずに $\Psi = \Psi(x)$ と記す．ファイバーが構造群そのものである空間は**主ファイバー束**とよばれる．この場合，群の表現空間の座標は G の元で指定される．

時空の各点には場の位相や場の混ざり具合を測るための独立した‘ものさし’（ゲージとよぶことにする）が存在し，異なる 2 点においてそれらの値を比較するためには，ゲージを揃（そろ）える必要性が生じる．図 A.9 の点 P における場の値 $\Psi(x)$ とそこから Δx^μ だけ離れた点 Q における場の値 $\Psi(x+\Delta x)$ を比較しよう．ここで，ゲージを揃えるはたらきをする場 $\alpha_\mu(x)$ を導入し，Δx^μ を微小として，

$$\Psi_{//}(x+\Delta x) = \left(1 + \sum_{\mu=0}^{3} \alpha_\mu(x)\Delta x^\mu\right)\Psi(x) \tag{A.269}$$

を定義する．ここで，$\Psi_{//}(x+\Delta x)$ は $\Psi(x)$ を点 Q でのゲージで換算したもので，このような操作は点 P から点 Q への**平行移動**とよばれる．また，$\alpha_\mu(x)$ は**接続**（connection）とよばれる．ゲージが揃ったので，$\Psi(x)$ の点 P における x^μ に関する偏微分が，

$$\begin{aligned} D_\mu\Psi(x) &= \lim_{\Delta x^\mu \to 0} \frac{\Psi(x+\Delta x) - \Psi_{//}(x+\Delta x)}{\Delta x^\mu} \\ &= (\partial_\mu - \alpha_\mu(x))\,\Psi(x) \end{aligned} \tag{A.270}$$

で定義される．これは**共変微分**（covariant derivative）とよばれる．

点 P における $\Psi(x)$ は構造群 G の作用により，ファイバー上の点 P′ における $\Psi'(x)$ に変換される．この変換は G の元を $U(x)$ と記すと，

$$\Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \tag{A.271}$$

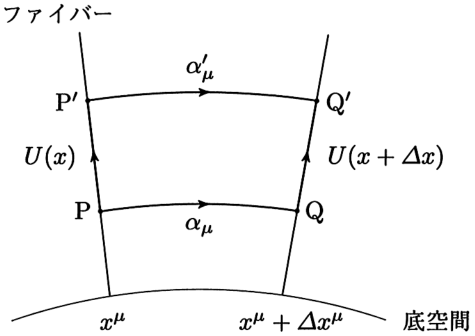


図 A.9　ファイバー束.

と表される．$U(x)$ は生成子 T^a を用いて,

$$U(x) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{n}\theta^a(x)T^a\right) \tag{A.272}$$

と表される．ここで，G の次元を n とした．また，$U(\theta(x))$ の代わりに $U(x)$ と記した．θ^a が単なるパラメータではなく，実関数 $\theta^a(x)$ に置き換わっていることに注意しよう．また，点 Q においても同様にして,

$$\Psi'(x+\Delta x) = U(x+\Delta x)\Psi(x+\Delta x) \tag{A.273}$$

により，点 Q′ における場に変換される．

点 P を含むファイバーに直交する水平方向の空間内で定義された接続 α_μ が G の作用により，点 P′ を含む空間内の接続 α'_μ に変換されるとする．α'_μ が点 Q′ において矛盾なくゲージを揃えるはたらきをするためには，点 P から点 Q まで平行移動させて得られた場 $\Psi_{/\!/}(x+\Delta x)$ に変換 (A.273) を施したものと，変換 (A.271) を施して得られた点 P′ における $\Psi'(x)$ を点 Q′ まで平行移動させたもの $\Psi'_{/\!/}(x+\Delta x)$ が一致するという条件が必要となる．このような条件は

$$\begin{aligned} U(x+\Delta x)&\left(1+\sum_{\mu=0}^{3}\alpha_\mu(x)\Delta x^\mu\right)\Psi(x) \\ &= \left(1+\sum_{\mu=0}^{3}\alpha'_\mu(x)\Delta x^\mu\right)U(x)\Psi(x) \end{aligned} \tag{A.274}$$

と表され，$U(x+\Delta x) = U(x) + \Delta x^\mu \partial_\mu U(x)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \alpha'_\mu(x) &= U(x)\alpha_\mu(x)U^{-1}(x) + (\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) \\ &= U(x)\alpha_\mu(x)U^{-1}(x) - U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \end{aligned} \tag{A.275}$$

が導かれる．ここで，Δx^μ に関する高次の項を無視した．また，2 行目への変形の際に，単位行列 $I(=UU^{-1})$ の微分が 0 であることから導かれる公式

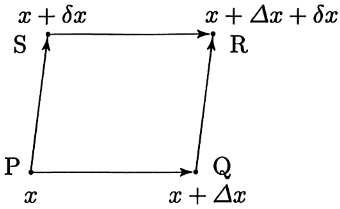


図 A.10　2 つの経路.

$$0=\partial_\mu I=\partial_\mu\left(UU^{-1}\right)=(\partial_\mu U)U^{-1}+U\partial_\mu U^{-1} \tag{A.276}$$

を用いた.

次に，ファイバーと直交する水平方向の空間内の閉じた経路を通って平行移動された場の値が元の値とどのくらい異なるかをみよう．図 A.10 のような 2 つの経路を考える．点 P から点 Q を経由して点 R に至る経路に関しては,

$$\begin{aligned}
&\Psi_{/\!/}(x+\Delta x+\delta x)|_{\mathrm{PQR}}\\
&=\left(1+\sum_{\nu=0}^{3}\alpha_\nu(x+\Delta x)\delta x^\nu\right)\left(1+\sum_{\mu=0}^{3}\alpha_\mu(x)\Delta x^\mu\right)\Psi(x)\\
&=\left\{1+\sum_{\nu=0}^{3}\alpha_\nu\delta x^\nu+\sum_{\mu=0}^{3}\alpha_\mu\Delta x^\mu\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{\mu,\nu=0}^{3}\left(\partial_\mu\alpha_\nu+\alpha_\nu\alpha_\mu\right)\delta x^\nu\Delta x^\mu\right\}\Psi(x)
\end{aligned} \tag{A.277}$$

となり，また，点 P から点 S を経由して点 R に至る経路に関しては,

$$\begin{aligned}
&\Psi_{/\!/}(x+\Delta x+\delta x)|_{\mathrm{PSR}}\\
&=\left(1+\sum_{\mu=0}^{3}\alpha_\mu(x+\delta x)\Delta x^\mu\right)\left(1+\sum_{\nu=0}^{3}\alpha_\nu(x)\delta x^\nu\right)\Psi(x)\\
&=\left\{1+\sum_{\mu=0}^{3}\alpha_\mu\Delta x^\mu+\sum_{\nu=0}^{3}\alpha_\nu\delta x^\nu\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{\mu,\nu=0}^{3}\left(\partial_\nu\alpha_\mu+\alpha_\mu\alpha_\nu\right)\delta x^\nu\Delta x^\mu\right\}\Psi(x)
\end{aligned} \tag{A.278}$$

となる．よって，閉じた経路 P→Q→R→S→P に沿って平行移動したのちに,

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathrm{PQRS}}\Psi_{/\!/}(x)dx&=\Psi_{/\!/}(x+\Delta x+\delta x)|_{\mathrm{PQR}}-\Psi_{/\!/}(x+\Delta x+\delta x)|_{\mathrm{PSR}}\\
&=\sum_{\mu,\nu=0}^{3}\left(\partial_\mu\alpha_\nu-\partial_\nu\alpha_\mu-\alpha_\mu\alpha_\nu+\alpha_\nu\alpha_\mu\right)\delta x^\nu\Delta x^\mu\Psi(x)
\end{aligned} \tag{A.279}$$

だけ変化する．(A.279) の値が 0 でない場合，G の表現空間（内部空間）に由来する**曲率**（curvature）が存在すると解釈される．曲率をもつ外部空間とし

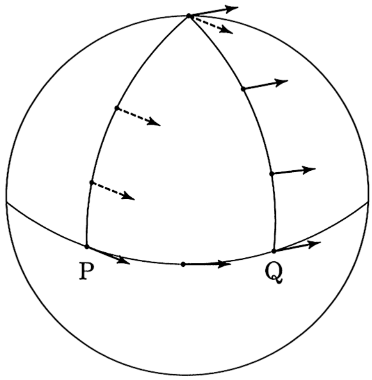


図 A.11　球面上の平行移動．

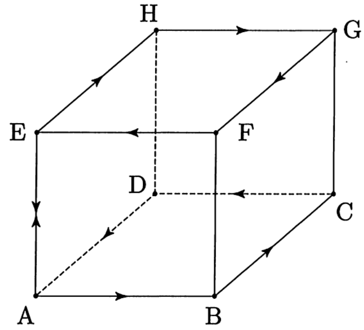


図 A.12　ビアンキの恒等式を導く経路の一部．

て，2 次元球面 S^2 が存在する．例えば，地球儀の表面の各点に接空間（2 次元平面）をファイバーとして張り付けて拡張した空間を考える．点 P における接空間を $T_{\mathrm{P}}(S^2)$ と記す．$T_{\mathrm{P}}(S^2)$ 上のベクトルを S^2 上で点 Q まで平行移動させると，$T_{\mathrm{Q}}(S^2)$ 上のベクトルになる．図 A.11 のように平行移動を行う経路に依存して，ベクトルの向きが変化する様子が異なる．これは S^2 が曲率をもつことに起因する．

(A.279) に現れる係数は共変微分を用いて，

$$[D_\mu, D_\nu]\,\Psi(x) = -\left(\partial_\mu \alpha_\nu - \partial_\nu \alpha_\mu - \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu\right)\Psi(x) \qquad \text{(A.280)}$$

と表される．以後，$\Psi(x)$ を省略する．

また，演算子 $\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$ の間で結合則 $\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}$ が成立するとき，ヤコビの恒等式

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \qquad \text{(A.281)}$$

が成り立ち，共変微分に適用することにより，

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]] + [D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] = 0 \qquad \text{(A.282)}$$

が導かれる．(A.282) は**ビアンキの恒等式** (Bianchi identity) とよばれる．ちなみに，(A.282) を導く経路の一部を図 A.12 に与える．具体的には，経路 1：A → B → C → D → A → E → H → G → F → E → A，経路 2：A → E → F → B → A → D → C → G → H → D → A，経路 3：A → D → H → E → A → B → F → G → C → B → A による変化量（それぞれ (A.282) の左辺の 3 つの項に相当する）を足し合わせたものから導かれる．実際，これらの和を取ると必ず各辺に関して矢印の異なるものが対で現れるため，寄与が完全に相殺し恒等的に 0 になることに注意しよう．

最後に，ゲージ理論との関係について述べる．第 5 章における共変微分 $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a$ と (A.270) が一致するとき，

$$\alpha_\mu(x) = -ig\sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a \tag{A.283}$$

が成り立つ．このとき，(A.275) は

$$\sum_{a=1}^{n} A'^a_\mu(x)T^a = U(x)\sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{A.284}$$

となり，(5.39) と一致する．また，(A.280) から，

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= ig\left(\partial_\mu \sum_{a=1}^{n} A_\nu^a(x)T^a - \partial_\nu \sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a \right.\\
&\qquad \left. - \sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a \sum_{b=1}^{n} A_\nu^b(x)T^b + \sum_{a=1}^{n} A_\nu^a(x)T^a \sum_{b=1}^{n} A_\mu^b(x)T^b \right)\\
&= ig\sum_{a=1}^{n}\left(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g\sum_{b,c=1}^{n} f^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x)\right)T^a\\
&\equiv ig\sum_{a=1}^{n} F_{\mu\nu}^a(x)T^a
\end{aligned} \tag{A.285}$$

のように，ゲージ場の強さ $F_{\mu\nu}^a(x)$ が得られる．さらに，(A.282) より，

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{n} F_{\mu\nu}^a(x)T^a \tag{A.286}$$

が導かれる．ここで，

$$D_\mu F_{\nu\lambda} = \partial_\mu F_{\nu\lambda} + ig[A_\mu, F_{\nu\lambda}], \quad A_\mu = \sum_{a=1}^{n} A_\mu^a(x)T^a \tag{A.287}$$

である．構造群が $U(1)_{\mathrm{EM}}$ の場合，A_μ は電磁ポテンシャル，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場の強さである．このとき，(A.286) は

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{A.288}$$

となり，この式は (4.3)，(4.4) に相当する（(4.61)，(4.62) 参照）．

参考までに，構造群として本義ローレンツ群を選ぶと重力を含む理論がゲージ理論として構成されることが知られている（文献 [16] 参照）．

付録 B
ギリシア文字と専門用語

ギリシア文字の読み方と本書でそれが表す主な物理や物理数学に関する専門用語を表 B.1 にまとめた．日本語読みは標準的なものを記載した．

表 B.1 ギリシア文字の読み方と主な専門用語．

大文字	小文字	読み方	専門用語
A	α	alpha：アルファ	微細構造定数
B	β	beta：ベータ	β 崩壊
Γ	γ	gamma：ガンマ	γ 行列，光子
Δ	δ	delta：デルタ	変分，δ 関数
E	ε	epsilon：イプシロン	無限小量，誘電率
Z	ζ	zeta：ゼータ	
H	η	eta：イータ	計量テンソル，スピノル
Θ	θ	theta：シータ	角度
I	ι	iota：イオタ	
K	κ	kappa：カッパ	
Λ	λ	lambda：ラムダ	波長，ゲルマン行列
M	μ	mu：ミュー	透磁率，ミューオン
N	ν	nu：ニュー	振動数，ニュートリノ
Ξ	ξ	xi：クシー	スピノル
O	o	omicron：オミクロン	
Π	π	pi：パイ	円周率，π 中間子
P	ρ	rho：ロー	確率密度，電荷密度
Σ	σ	sigma：シグマ	和の記号，パウリ行列
T	τ	tau：タウ	固有時，パウリ行列
Υ	υ	upsilon：ウプシロン	Υ 中間子
Φ	ϕ φ	phi：ファイ	波動関数，場の演算子
X	χ	chi：カイ	
Ψ	ψ	psi：プサイ	波動関数，場の演算子
Ω	ω	omega：オメガ	角速度，角振動数

参考文献

[1] 川村清，力学，裳華房，1998．全学教育の授業（工学部生対象）で（授業担当の前任者に引き継いで）教科書として使用している．

[2] 高橋康，量子力学を学ぶための解析力学入門，講談社，1978．増補第 2 版が刊行されている．

[3] 高橋康，量子場を学ぶための場の解析力学入門，講談社，1982．高橋康・柏太郎著のもとで増補第 2 版が刊行されている．

[4] 早田次郎，現代物理のための解析力学，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 46，サイエンス社，2006 (電子版, 2017).

[5] 内山龍雄，相対性理論，岩波書店，1977.

[6] 窪田高弘，佐々木隆，相対性理論，裳華房，2001.

[7] ガシオロウィッツ，(林武美，北門新作 訳)，量子力学 I，II，丸善出版，1998．理学部の授業で（授業担当の前任者に引き継いで）教科書として使用している．

[8] 猪木慶治，川合光，量子力学 I，II，講談社，1994.

[9] 川村嘉春，相対論的量子力学，裳華房，2012.

[10] 日置善郎，場の量子論－摂動計算の基礎－，吉岡書店，1999.

[11] 柏太郎，演習 場の量子論　基礎から学びたい人のために，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 12，サイエンス社，2001 (新版 2006, SGC Books P2 巻として単行本化).

[12] 坂井典佑，場の量子論，裳華房，2002.

[13] 日置善郎，相対論的量子場－演算子の基礎的性質－，吉岡書店，2008.

[14] 坂本眞人，場の量子論 不変性と自由場を中心にして，裳華房，2014.

[15] 砂川重信，理論電磁気学，第 2 版，紀伊國屋書店，1973.

[16] 内山龍雄，一般ゲージ場論序説，岩波書店，1987.

[17] 九後汰一郎，ゲージ場の量子論 I，II，培風館，1989.

[18] エイチスン，ヘイ，(藤井昭彦 訳)，ゲージ理論入門 I，II，第 2 版，講談社，1992.

[19] 藤川和男，ゲージ場の理論，岩波書店，2001.

[20] 近藤慶一，ゲージ場の量子論入門　質量ギャップとクォーク閉じ込めの解決に向けて，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 45，サイエンス社，2006 (電子版, 2013).

[21] 南部陽一郎，クォーク 素粒子物理はどこまで進んできたか，第 2 版，講談社，1998．素粒子物理学に関する入門書として最適である．

[22] 渡邊靖志，素粒子物理入門，培風館，2002.

[23] 坂井典佑，素粒子物理学，培風館，1993.

[24] 原康夫，稲見武夫，青木健一郎，素粒子物理学，朝倉書店，2000.

[25] 川村嘉春，例題形式で学ぶ現代素粒子物理学，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 48，サイエンス社，2006 (電子版, 2016).

[26] 井上研三，素粒子物理学，共立出版，2011.

[27] 林青司，CP 対称性の破れ 小林・益川模型から深める素粒子物理，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 91，サイエンス社，2012.

[28] 林青司，素粒子の標準模型を超えて，丸善出版，2015.

[29] 太田信義， 坂井典佑，超対称性理論 現代素粒子論の基礎として，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 51，サイエンス社，2006 (電子版, 2016).

[30] 大河内豊，超対称性の破れ 場の理論から弦理論まで，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 131，サイエンス社，2017.

[31] 菅本晶夫，曹基哲，対称性の自発的破れ 基礎からランダウ理論，南部理論，標準模型，ヒッグス粒子まで，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 121，サイエンス社，2016.

[32] 沢田昭二，物理数学，丸善出版，1990.

[33] 佐藤光，物理数学ノート 基礎物理をよりよく理解するために，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 20，サイエンス社，2002 (新版 2006, SGC Books P1 巻として単行本化).

[34] 安達忠次，ベクトル解析，培風館，1961.

[35] 佐藤光，群と物理，丸善出版，1992.

[36] 朝永振一郎，スピンはめぐる，中央公論社，1974.

[37] J. D. Bjorken and S. D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, McGraw-Hill, 1964.

[38] J. D. Bjorken and S. D. Drell, “Relativistic Quantum Fields”, McGraw-Hill, 1965.

[39] K. Huang, “Quarks, Leptons & Gauge Fields”, World Scientific, 1982.

[40] T.-P. Cheng and L.-F. Li, “Gauge theory of elementary particle physics”, Oxford university press, 1984.

[41] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity”, Princeton university press, 1982.

[42] B. Zwiebach, “A first course in String Theory”, Cambridge university press, 2004.

[43] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early Universe”, Addison-Wesley, 1990.

ここに記載した文献は初版が 1990 年以前のものであれば，筆者が学生時代に自主学習，自主ゼミ，あるいはゼミで使用したもので，現在ではその多くが改訂版として出版されている．各物理分野に関して，優れた入門書や教科書（テキスト）が数多く出版されている（ここで，紹介しなかった著者の方々にはご容赦願いたい）．できれば実際に図書館等で実物を手に取って，各自の好みに合わせて選ぶのがよいと思う．

素粒子の性質および実験データについては，Particle Date Group により定期的に（偶数年に）刊行されるデータブックが有用である．その最新版は

Particle Date Group, “Review of Particle Physics”, Chinese Physics C, Volume 40, Number 10, Octorber 2016

である．本書に記載した素粒子に関するデータの多くはこの文献に記載されたものを用いた．この文献の内容は，http://pdg.lbl.gov/ で閲覧することもできる．また，素粒子物理学に関する最新の研究論文は，https://arxiv.org/ に収められていて，無料で掲載やダウンロードができる．

索　引

サ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

ワ

著者略歴

川村（かわむら） 嘉春（よしはる）

1961年　滋賀県長浜市生まれ
1985年　名古屋大学理学部物理学科卒業
1990年　金沢大学自然科学研究科物質科学専攻修了，学術博士
1990年　信州大学理学部助手
1999年　信州大学理学部助教授
2006年　信州大学理学部教授，現在に至る．
専　門　素粒子物理学
主要著書　「例題形式で学ぶ現代素粒子物理学」（サイエンス社，2006年），
「相対論的量子力学」（裳華房，2012年）

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 138
『基礎物理から理解する ゲージ理論　“素粒子の標準数式”を読み解く』
著　者　川村 嘉春
2017年12月25日　初版発行

数理科学編集部　　　発行人　森平敏孝
TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで.
表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL.(03)5474–8500(代表)
〒151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474–8600(広告部)

印刷　(株) ディグ　杉井康之
製本　ブックアート　米良孝司